فصل چهارم

گراف

اهداف:

در پایان این فصل انتظار می‌رود:

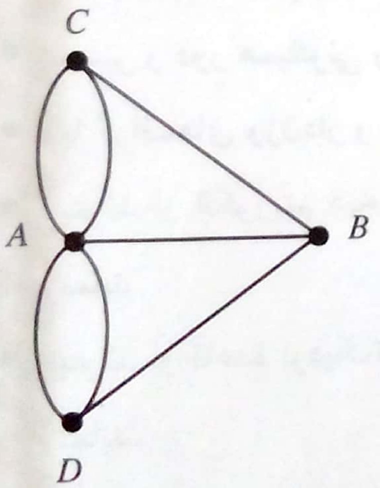
- دانشجو با مفهوم گراف، گراف جهت‌دار و زیرگراف آشنا شود.
- با نمایش گراف آشنا شود و بتواند گراف‌های یکریخت را تشخیص دهد.
- مفهوم مسیر و دور و کاربرد آن را بشناسد.
- گذر و مدارِ اویلری را در گراف تشخیص دهد.
- مسیر و دورِ همیلتونی را در گراف تشخیص دهد.
- با گراف‌های وزن‌دار و مسائل مربوط به آن آشنا شود.
- بتواند از الگوریتم دیجکسترا جهت یافتن طول کوتاه‌ترین مسیرهمیلتونی استفاده نماید.
- بتواند از قاعدهٔ نزدیک‌ترین همسایه جهت یافتن دور همیلتونی نیمه بهینه استفاده نماید.
- با گراف مسطح و خواص آن آشنا شود و بتواند گراف مسطح را تشخیص دهد.
- دانشجو بتواند با استفاده از الگوریتم‌های معرفی شده موضوعات مطرح در زندگی روزمره را که می‌توانند با گراف حل شوند، پاسخ دهد.

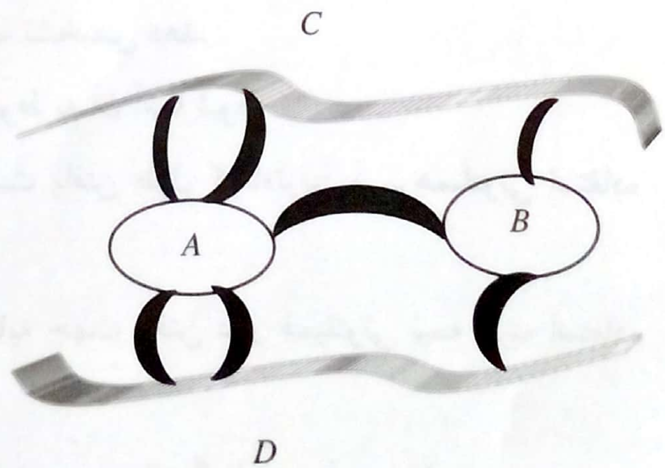
۴-۱- تاریخچه و تعاریف مقدماتیِ گراف

همان‌طور که در فصل دو دیده شد می‌توان رابطهٔ دوتایی روی مجموعه A را به عنوان زیرمجموعه‌ای از $A \times A$ تعریف نمود، و آن را با گراف یا ماتریس نمایش داد. در این فصل ابتدا تاریخچهٔ چگونگی تشکیل نظریهٔ گراف ارائه و سپس مفهوم گراف به صورت عمومی‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در قرن هجده میلادی، شهر کونیگسبرگ[۱] از دو ساحل یک رودخانه و دو جزیره تشکیل شده بود که ۷ پل این چهار منطقه را (مطابق شکل۴-۱الف) به هم وصل می‌کرد. معمایی سال‌ها شهروندان را به‌خود سرگرم کرده بود: که آیا امکان دارد با آغاز از یکی از این مناطق، در شهر گشتی زد به‌طوری‌که از هر پل فقط یکبار عبور نمود و به محل اولیه بازگشت؟

در سال ۱۷۳۶میلادی با حل این معما توسط اویلر[۲]، نظریهٔ گراف‌ها پایه‌گذاری شد، بدین صورت که به هر ۴ منطقه، نقطه‌ای از صفحه اختصاص داده و به ازای هر پل واصل بین دو منطقه، پاره خط بین دو نقطه متناظر با آنها رسم نمود. بدین ترتیب مطابق شکل۴-۱(ب) به مدل ریاضی دست‌یافت و به سادگی پاسخ معما که منفی بود، مشخص گردید.





شکل ۴-۱.

---

۱. Kvnygsbrg

۲. Euler

ازگراف‌ها برای حل مسائل زیادی در ریاضیات و علوم کامپیوتر استفاده می‌شود. در علوم کامپیوتر، گراف‌ها در دروس مدارمنطقی (برای نمایش مدارها)، نظریهٔ زبان‌ها و ماشین‌ها (جهت رسم ماشین‌ها)، سیستم عامل (ارتباط بین حالت‌های یک فرآیند) و کامپایلر (رسم نمودارهای تغییر حالت) کاربرد زیادی دارند.

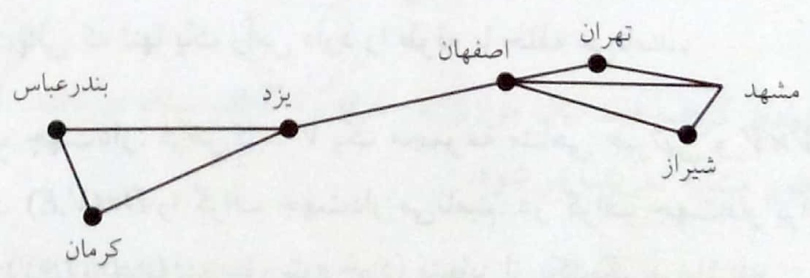
جهت نمایش ارتباط و لینک بین وب سایت‌ها نیز می‌توان از گراف استفاده نمود. برای این منظور هر وب سایت به صورت رأس و ارتباط و لینک بین وب سایت‌ها به صورت یالِ گراف نمایش داده می‌شود.

ازگراف‌ها در مسائلی مانند طراحی مدارهای الکتریکی، اصلاح هندسی خیابان‌ها، حل مشکل ترافیک نیز استفاده می‌شود.

هرگراف از دو مجموعهٔ $V \neq \phi$ به‌نام مجموعه رئوس و مجموعهٔ E به‌نام مجموعه یال‌ها تشکیل شده‌است. به‌طور معمول هر رأسِ گراف با یک نقطه یا دایره کوچک در صفحه نشان داده می‌شود؛ یال‌ها که نشان‌دهنده نحوهٔ ارتباط رئوس با یکدیگر می‌باشند، با یک پاره‌خط(جهت‌دار یا فاقدجهت) مشخص می‌شوند. مجموعه یال‌های یک گراف را می‌توان به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$E = \{uv \mid u, v \in V, uRv\}$$

مثال ۴-۱: یک شرکت مخابراتی برای یکی از سرویس‌های شبکه‌ای خود، تعدادی دیتاسنتر را در شهرهای تهران، اصفهان، شیراز، مشهد، کرمان، یزد و بندرعباس راه‌اندازی نموده است. جهت مدل نمودن این سیستم‌ها و ارتباط آن‌ها می‌توان از گراف استفاده نمود؛ به‌طوری‌که محل هر دیتاسنتر به‌صورت یک رأس و ارتباط بین آنها به‌صورت یال نشان داده شود.

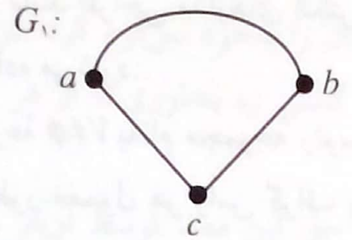


شکل ۴-۲.

گراف: فرض کنید V یک مجموعهٔ غیرتهیِ متناهی و E زیر مجموعه‌ای از مجموعه تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V باشد، در این‌صورت $G=(V,E)$ را گراف می‌نامیم. همان‌طور که بیان شد، مجموعهٔ V را مجموعهٔ رئوس و E را مجموعهٔ یال‌ها گوئیم.

برای نمایش یالی که از دو رأس a و b عبور می‌کند، از نمایش $\{a,b\}$ یا ab استفاده می‌شود. در این کتاب نمایش ab مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مثال ۴-۲: مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف G_1، در زیر نشان داده شده است.

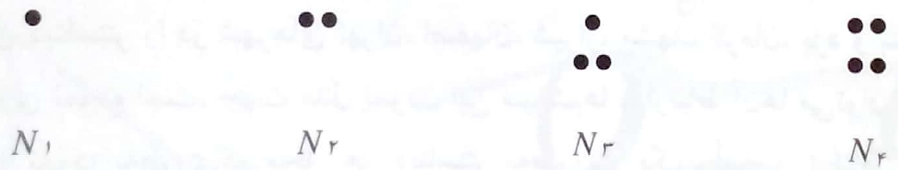


vertex ، راس
edge ، لبه-یال

شکل ۴-۳.

$V=\{a,b,c\}$
$E=\{ab,bc,ac\}$

گراف تهی: گرافِ بدون یال را گراف تهی می‌نامند. گراف تهی با N_p نشان داده می‌شود. گراف‌های تهی از مرتبهٔ ۱،۲،۳ و ۴ در شکل ۴-۴ نشان داده شده است.



({2,3,5,7}

شکل ۴-۴.

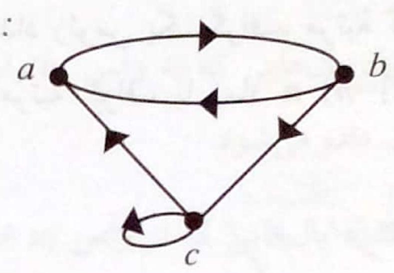
طوقه: یالی که تنها یک رأس دارد را طوقه یا حلقه می‌نامند.

گرافِ جهت‌دار: فرض کنید V یک مجموعهٔ متناهی غیرتهی و $E\subseteq V\times V$ باشد، در این‌صورت $D=(V,E)$ را گرافِ جهت‌دار می‌نامیم. در گرافِ جهت‌دار برای رئوس u و v، دو یال (u,v) و (v,u) (درصورت وجود) متمایز از یکدیگر می‌باشند.

مثال ۴-۳: مجموعهٔ رئوس و یال‌های گرافِ D_1، در زیر داده شده است. گراف را رسم نمایید.

$V=\{a,b,c\}$
$E=\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,a),(c,c)\}$

حل:



شکل ۴-۵.

یال‌های موازی: هرگاه بین دو رأس یک گراف، بیش از یک یال موجود باشد، آن یال‌ها را یال‌های موازی گویند. درگراف جهت‌دار، یال‌های بین دو رأس را موازی نامند هرگاه یال‌ها، هم‌جهت باشند.

مثال ۴-۴: در گراف‌های زیر، بین دو رأس a و b یال‌های موازی وجود دارد.

شکل ۴-۶.

گرافِ ساده: گرافِ فاقد یال موازی و طوقه را گرافِ ساده می‌نامند. گرافِ سادهٔ جهت‌دار، به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

گرافِ چندگانه: گرافی که شامل یال موازی باشد، گرافِ چندگانه گویند. هم‌چنین گرافِ جهت‌دارِ شامل یال موازی، گرافِ چندگانهٔ جهت‌دار نامیده می‌شود.

گرافِ مختلط: گرافی که شامل یال‌های جهت‌دار و غیرجهت‌دار باشد، گراف مختلط می‌نامند.

رئوس مجاور: در گرافِ $G=(V,E)$، دو رأس v و u را مجاورگویند، هرگاه v و u دو سر یک یال در G باشند.

مرتبه و اندازهٔ گراف: تعداد رئوس یک گراف، مرتبهٔ گراف و تعداد یال‌های آن، اندازهٔ گراف نامیده می‌شود. مرتبهٔ گراف با نماد n $(|V|=n)$ و اندازهٔ گراف با m $(|E|=m)$ نشان داده می‌شود.

و اگر طوقه مجاز باشد

گزاره۴-۱:

$$m \leq \binom{n}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\cdot \leq m \leq \binom{n}{۲} = \frac{n(n-1)}{2}$$

اثبات:

طبق تعریف گراف، مجموعهٔ یال‌های گراف، زیرمجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های دوعضوی از V می‌باشند، بنابراین حداکثر تعداد یال‌ها برابر با $\binom{n}{۲}$ و حداقل تعداد یال‌ها برای گراف تهی با $m=\cdot$ است؛ لذا:

$$\cdot \leq m \leq \binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

■

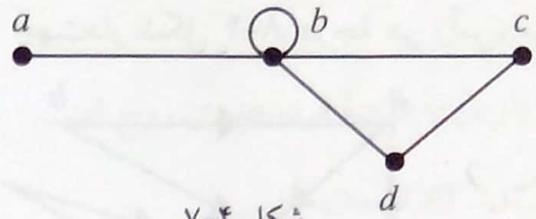
درجهٔ رأس u_i در گراف: تعداد یال‌های متصل به رأس u_i را، درجهٔ آن رأس گویند و با $deg(u_i)$ نشان می‌دهند.

توجه:

درجهٔ رأسی که دارای یال طوقه باشد، استثناء است وهر یالِ طوقه ۲ واحد در درجهٔ رأس، محاسبه می‌شود.

مثال ۴-۵: در گرافِ شکل ۴-۷، درجهٔ رئوس عبارت است از:

$deg(a)=۱$
$deg(b)=۵$
$deg(c)=deg(d)=۲$



شکل ۴-۷.

فرض‌کنید $u_i \in V$ یک رأس دلخواه گرافِ D باشد، آن‌گاه:

درجهٔ ورودی u_i: تعداد یال‌هایی که به رأس u_i وارد می‌شوند، درجهٔ ورودی u_i نامیده و با نماد $id(u_i)$ نشان داده می‌شود.

درجهٔ خروجی u_i: تعداد یال‌هایی که از رأس u_i خارج می‌شوند، درجهٔ خروجی u_i نامیده و با نماد $od(u_i)$ نشان داده می‌شود.

مجموع درجهٔ u_i: مجموع درجه‌های ورودی و خروجی u_i را مجموع درجهٔ آن می‌نامند؛ به عبارت دیگر:

$$deg\,(u_i)=id(u_i)+od(u_i)$$

و لذا مجموع درجه رئوس گرافِ D برابر است با:

$$\sum_{i=1}^{n} deg\,(u_i)=\sum_{i=1}^{n} id(u_i)+\sum_{i=1}^{n} od(u_i)$$

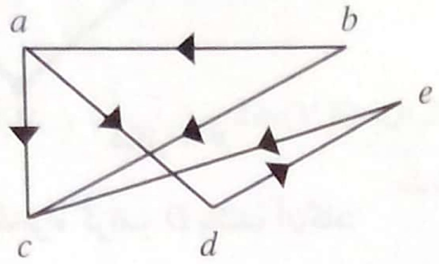
رأس منفرد: رأسی که درجهٔ آن صفر باشد، رأس منفرد یا تنها نامیده می‌نامند.

رأس معلق: رأسی که درجهٔ آن یک باشد، رأس معلق یا آویزان می‌نامند. به همین ترتیب یالی که تنها یک رأس آن، رأس **معلق** باشد، **یال معلق** می‌نامند.

رأس فرد: رأسی که درجهٔ آن عددی فرد باشد، رأس فرد می‌نامند.

رأس زوج: رأسی که درجهٔ آن عددی زوج باشد، رأس زوج می‌نامند.

مثال ۴-۶: در گرافِ جهت‌دار شکل ۴-۸، درجهٔ هر رأس، مرتبه و اندازهٔ گراف را بیابید.



شکل ۴-۸

حل:

$deg(a)=۳$	$id(a)=۱$	$od(a)=۲$
$deg(b)=۲$	$id(b)=۰$	$od(b)=۲$
$deg(c)=۳$	$id(c)=۳$	$od(c)=۰$
$deg(d)=۲$	$id(d)=۱$	$od(d)=۱$
$deg(e)=۲$	$id(e)=۱$	$od(e)=۱$
$\sum_{i=۱}^{n} deg(u_i)=۱۲$	$\sum_{i=۱}^{n=۵} id(u_i)=۶$	$\sum_{i=۱}^{n=۵} od(u_i)=۶$

بنابراین گراف از مرتبهٔ ۵ ($n=۵$) و اندازهٔ 6 ($m=$ 6) می‌باشد.

قضیه ۴-۱: در گرافِ $G=(V,E)$، داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} deg(u_i)=۲\,|E|$$

اثبات:

از آنجایی‌که هر یال به دو رأس متصل است، پس در مجموع درجه‌های رئوس، هر یال ۲ بار محاسبه می‌گردد، بنابراین مجموع درجه‌های رئوسْ گراف، ۲ برابر تعداد یال‌های آن می‌باشد.

نتیجه:

در هر گراف، تعداد رئوس با درجهٔ فرد، عددی زوج است.

قضیه ۴-۲: درگرافِ $D=(V,E)$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} od(u_i) = \sum_{i=1}^{n} id(u_i) = |E| = m$$

اثبات:

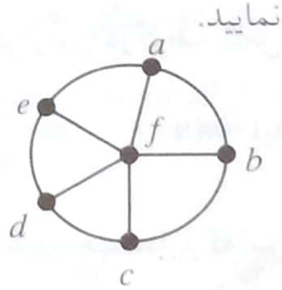
در گرافِ جهت‌دار، هر یال از یک رأس خارج و به رأس دیگر وارد می‌گردد، بنابراین مجموع درجه‌های خروجی رئوس و مجموع درجه‌های ورودی رئوس یکسان و هر دو این مجموع‌ها، همان تعداد یال‌های گراف می‌باشند.

■

رأس ماکزیمم: بزرگ‌ترین درجه در بین درجه‌های رئوس گرافِ $G=(V,E)$ را ماکزیمم درجه نامند و با $\Delta(G)$ نمایش می‌دهند؛ به‌عبارت دیگر: $\Delta(G)=Max\ \{deg(u_i) \mid u_i \in V\}$، رأس متناظر با $\Delta(G)$ را رأس ماکزیمم می‌نامند.

رأس مینیمم: کوچک‌ترین درجه در بین درجه رئوس گرافِ $G=(V,E)$ را مینیمم درجه نامند و با $\delta(G)$ نمایش می‌دهند؛ به‌عبارت دیگر: $\delta(G)=Min\ \{deg(u_i) \mid u_i \in V\}$. رأس متناظر با $\delta(G)$ را رأس مینیمم می‌نامند.

مثال ۴-۷: گرافِ شکل ۴-۹ را درنظر بگیرید. رئوس فرد، زوج گراف و نیز رأس ماکزیمم و مینیمم آن‌را مشخص نمایید.



شکل ۴-۹.

حل:

$deg(a)=deg(b)=deg(c)=deg(d)=deg(e)=3$ ، $deg(f)=5$

در این گراف، تمامی رئوس از درجهٔ فرد می‌باشند. پس $\Delta(G)=5$ و $\delta(G)=3$، رأس f رأس ماکزیمم و مابقی رئوس گراف، رأس مینیمم می‌باشند.

▸

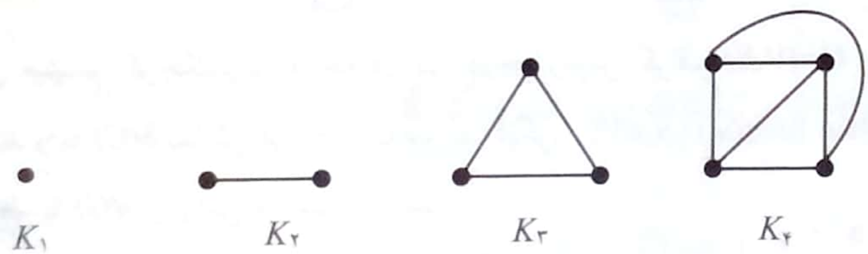
دنبالهٔ درجه‌های گراف: دنباله‌ای نزولی از درجه‌های رئوس گراف را، دنباله درجه‌های گراف گویند.

مثال ۴-۸: دنباله درجه‌های گراف مثال ۴-۷، عبارت است از: ۵،۳،۳،۳،۳،۳ .

▸

۴-۲- گراف‌های سادهٔ خاص

گرافِ کامل: گرافِ سادهٔ G را کامل نامند، هرگاه بین هر دو رأس متمایز آن دقیقاً یک یال موجود باشد. به عبارتی، هر رأسِ گرافِ کامل با $(n-1)$ رأس دیگر، مجاور است. گرافِ کامل n رأسی را با K_n نمایش می‌دهند. گراف‌های کامل K_1، K_2، K_3 و K_4 در شکل ۴-۱۰ نشان داده شده‌اند.



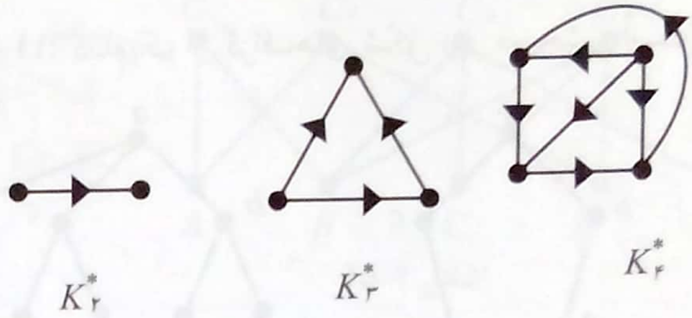
شکل ۴-۱۰.

طبق تعریف گراف کامل، درجهٔ هر رأس درگراف کامل، $(n-1)$ است، بنابراین:

$$2\,|E|=\sum_{i=1}^{n} deg\,(u_i)=n(n-1) \quad \Rightarrow \quad |E|=\frac{n(n-1)}{2}$$

تورنمنت: تورنمنت گرافی است جهت‌دار، که بین هر دو رأس متمایز u و v در آن، دقیقاً یک یال وجود داشته باشد. تورنمنتِ n رأسی را با K_n^* نشان می‌دهند.

در شکل ۴-۱۱ چند نمونه تورنمنت نشان داده شده‌است.

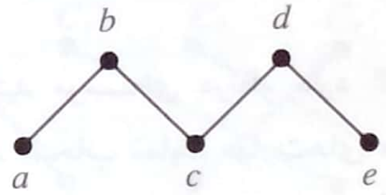


شکل ۴-۱۱.

گرافِ دو بخشی: گرافی که بتوان مجموعه رئوس آن را به دو زیر مجموعهٔ V_1 و V_2 چنان افراز نمود، به‌طوری‌که هر یال آن دارای یک رأس در V_1 و یک رأس در V_2 باشد، گراف دوبخشی نامند. به عبارت دیگر:

$$V=V_1 \cup V_2 \quad , \quad V_1 \cap V_2=\emptyset$$
$$uv \in E \quad \Rightarrow \quad u \in V_1 \ , v \in V_2$$

مثال ۴-۹: گرافِ زیر، یک گراف دوبخشی است.



شکل ۴-۱۲.

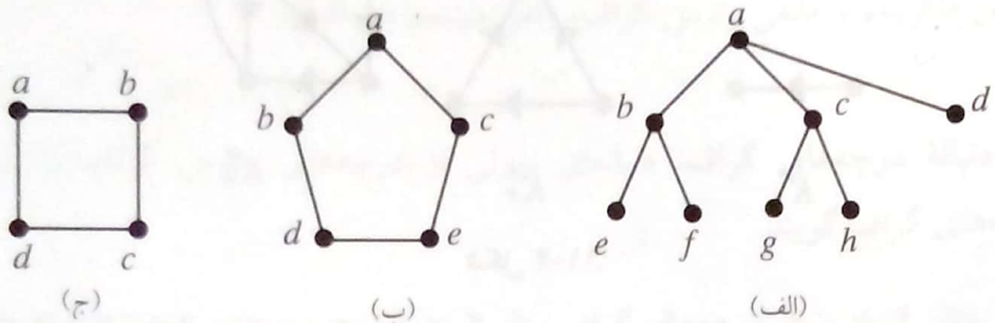
$V_1=\{a,c,e\} \quad , \quad V_2=\{b,d\}$

گراف دوبخشیِ کامل: گراف دو بخشی G با مجموعه افرازهای V_1 و V_2 را کامل گویند، هرگاه هر رأس بخش V_1 با هر رأس بخش V_2 مجاور باشد. اگر V_1 شامل m رأس و V_2 شامل n رأس باشد، گراف دو بخشیِ کامل فوق با $K_{m,n}$ نشان داده می‌شود.

مثال ۴-۱۰: شکل ۴-۱۳ دو گراف دوبخشی کامل $K_{3,3}$ و $K_{2,3}$ را نشان می‌دهد.

شکل ۴-۱۳.

مثال ۴-۱۱: کدام‌یک از گراف‌های شکل زیر دوبخشی است؟



شکل ۴-۱۴.

حل:

گرافِ (الف) دوبخشی است، با مجموعه رئوس $V_2=\{b,c,d\}$ و $V_1=\{a,e,f,g,h\}$.

گرافِ (ب) بنا به تعریف، گراف دوبخشی نمی‌باشد.

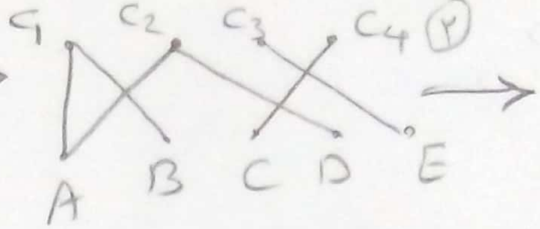
گرافِ (ج) دوبخشی است، با مجموعه رئوس $V_2=\{b,d\}$و$V_1=\{a,c\}$

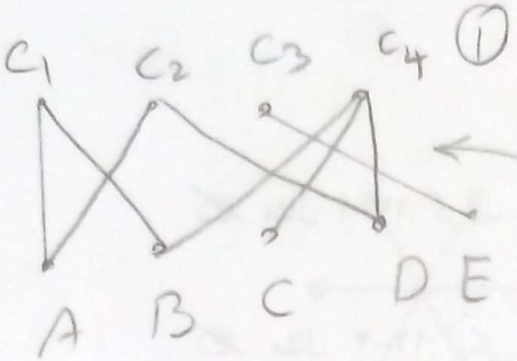
مثال ۴-۱۲: فرض‌کنید موسسه‌ای درنظر دارد ۴ دبیر $C_i\ (i=1,2,3,4)$، برای تدریس دروس A,B,C,D,E انتخاب نماید. مهارت‌های هر دبیر در جدول زیر نشان داده شده است. هدف تعیین دروس برای هر دبیر است به‌طوری‌که آن دبیر در دروس مورد نظر مهارت داشته باشد و هیچ دو دبیری درس مشترک نداشته باشند.

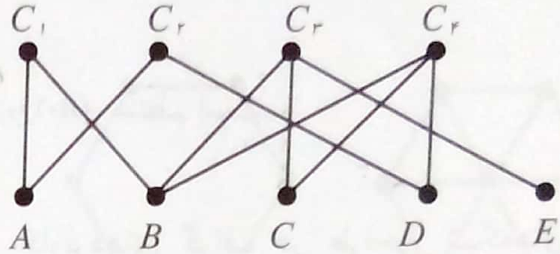
مهارت	دبیر
A,B	C_1
A,D	C_2
B,C,E	C_3
B,C,D	C_4

حل:

ارتباط بین دبیران و مهارت تدریس آن‌ها در دروس را می‌توان با یک گراف دوبخشی با مجموعه رئوس $V_1=\{C_1,C_2,C_3,C_4\}$ و $V_2=\{A,B,C,D,E\}$ به‌صورت شکل ۴-۱۵ نشان داد.





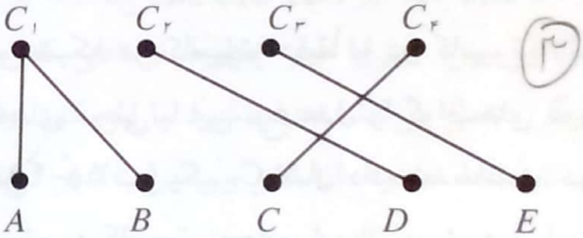


شکل ۴-۱۵.

با توجه به شکل ۴-۱۵، یکی از انتخاب‌ها را می‌توان به‌صورت زیر تعیین نمود:

E رأس معلق و تنها انتخاب آن رأس C_3 است، رئوس E، C_3 و تمامی یال‌های متصل به آن‌ها را حذف نموده؛ رأس انتخابی بعدی، رأس معلق C است که آن‌هم تنها یک انتخاب رأس C_4 را دارد، رأس C و C_4 و تمام یال‌های متصل به آن را نیزحذف نموده؛ رأس معلق D رأس انتخابی بعدی است، که آن‌هم تنها یک انتخاب رأس C_2 را دارد؛ رأس D و C_2 و تمام یال‌های متصل به آن را حذف نموده و در انتها رئوس A و B تنها انتخاب C_1 را دارند؛ شکل ۴- ۱۶.

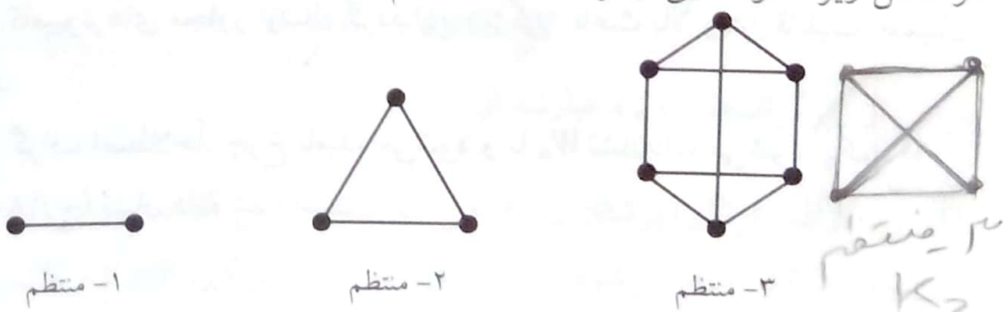
۱ → ۲ → ۳



شکل ۴-۱۶.

گراف r- منتظم: برای عددصحیح r $(r\geq 0)$، گرافِ سادهٔ $G=(V,E)$ را r- منتظم گویند، هرگاه درجهٔ هر رأس آن r باشد؛ به عبارت دیگر، $\forall i\ deg(u_i)=r$.

در شکل زیر، نمونه‌هایی ازگراف‌های r- منتظم نشان داده شده است.



شکل ۴-۱۷.

Scanned by CamScanner

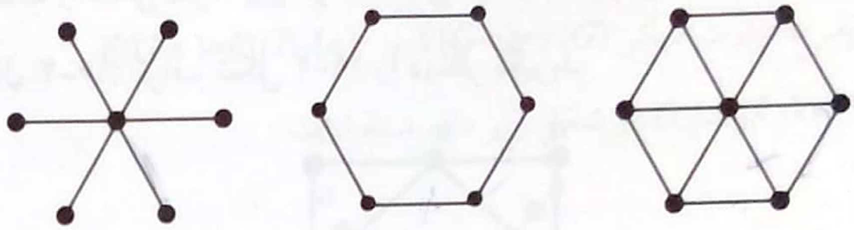
مثال ۴-۱۳: گراف K_n، $(n-1)$- منتظم است.

▸

مثال ۴-۱۴: یکی از کاربردهای گراف در طراحی شبکه‌های محلی است. فرض‌کنید در یک آپارتمان سیستم‌های کامپیوتری متفاوت با وسایل جانبی از قبیل پرینتر، اسکنر و رسام موجود باشند. برای استفاده بهینهٔ ساکنان قرار است آنها به‌نحوی بهم متصل شوند که ساکنان بتوانند از اطلاعات و امکانات موجود کمال استفاده را نمایند. برای این منظور مدل‌های زیر جهت اتصال این کامپیوترها معرفی می‌شوند:

- **شبکهٔ ستاره‌ای:** در این شبکه یکی از کامپیوترها به‌عنوان کامپیوتر مرکزی در نظرگرفته شده و سایر کامپیوترها به آن متصل می‌شوند. شبکهٔ محلی طراحی شده به این صورت، همانند یک گرافِ کامل دوبخشی $K_{1,n-1}$ است. در این طراحی مطابق شکل ۴-۱۸(الف)، اطلاعات از کامپیوتر مرکزی به سایر کامپیوترها ارسال می‌شود.
- **شبکهٔ حلقه‌ای:** در این شبکه هر کامپیوتر دقیقاً با دو کامپیوتر دیگر متصل است. گراف حاصل از شبکه‌های محلی با این نوع مدل را گراف‌های دور نامند و با C_n نشان می‌دهند. در شکل۴-۱۸(ب) یک C_6 نشان داده شده است. در این نوع شبکه اطلاعات از یک کامپیوتر به کامپیوتر مجاور ارسال می‌شود و ارسال اطلاعات تا زمانی ادامه دارد که کامپیوترِ ارسال کنندهٔ اطلاعات، مجدداً اطلاعات را دریافت نماید.
- **شبکهٔ ترکیبی:** در این نوع طراحی شبکه، ترکیبی از شبکه‌ی ستاره و حلقه استفاده می‌شود. اطلاعات می‌تواند از کامپیوتر مرکزی به سایر کامپیوترها یا از یک کامپیوتر به سایر کامپیوترهای مجاور ارسال گردد.این ویژگی باعث بالا رفتن قابلیت اطمینان می‌گردد.

این نوع گراف اصطلاحاً، چرخ نامیده می‌شود و با W_n نشان‌داده می‌شود. یک W_7 در شکل ۴-۱۸(ج) نشان داده شده است.



(الف) (ب) (ج)

شکل ۴-۱۸.

۴-۳- زیرگراف و انواع آن

برای درک بهتر مفهوم زیرگراف، به مثال زیر توجه نمایید.

مثال ۴-۱۵: فرض کنید شبکهٔ بزرگ مخابراتیِ کشور فقط به اطلاعات مبادله شده بین شهرهای تهران، اصفهان، شیراز و مشهد احتیاج دارد. برای این منظور کافی‌است تمامیِ خطوط ارتباطی بین شهرها بجز خطوط ارتباطیِ که حداقل ۲ شهر از ۴ شهر مذکور را به یکدیگر متصل می‌کند، حذف شود. با این کار، اولاً شهرها به ۴ شهرِ مورد نظر محدود شده، ثانیاً فقط خطوط ارتباطیِ بین این ۴ شهر در دسترس می‌باشد.

زیرگراف: گرافِ $G_1=(V_1,E_1)$ را زیرگرافِ $G=(V,E)$ گویند، هرگاه:

$$E_1 \subseteq E \quad , \phi \neq V_1 \subseteq V$$

گراف G_1، زیر گرافِ سرهٔ گرافِ G است، هرگاه:

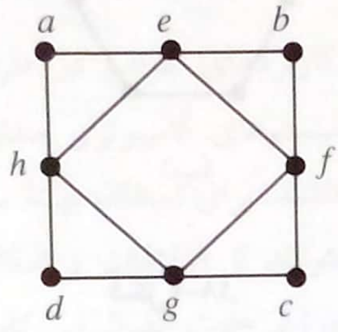
$$E_1 \subsetneq E \quad , \phi \neq V_1 \subsetneq V$$

برخی از زیرگراف‌های ویژه عبارتند از:

زیرگراف فراگیر(پوشا): زیرگرافی که همهٔ رئوس گراف را در برداشته باشد، زیرگراف فراگیر نامیده می‌شود. بنابراین در زیر گرافِ فراگیر، $V_1=V$ و $E_1 \subseteq E$.

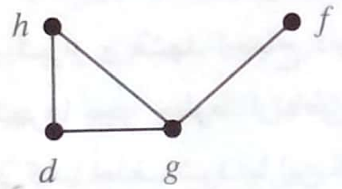
زیرگراف القاییِ رئوس V_1: زیرگرافی که تمام یال‌هایی از گراف G که دو سر آنها در V_1 است را شامل شود، زیر گراف القائی مجموعه رئوس V_1 نامند.

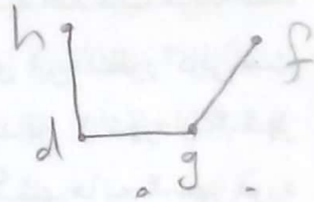
مثال ۴-۱۶: گرافِ شکل ۴-۱۹ را درنظر بگیرید.



شکل ۴-۱۹.

الف)زیرگرافِ القایی مجموعه رئوس $V_1=\{h,d,g,f\}$ عبارت است از:

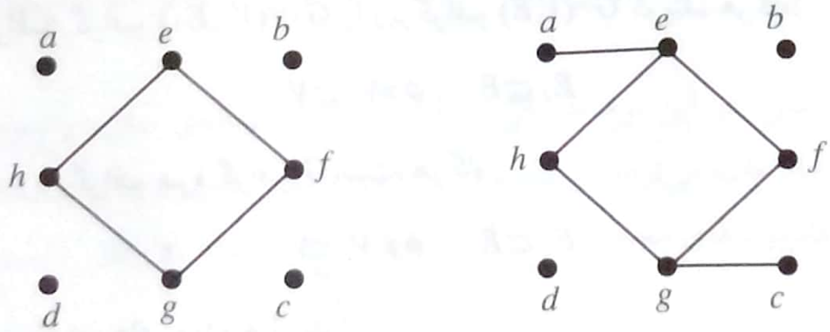




القایی شیت

شکل ۴-۲۰.

ب) دو نمونه از زیرگراف‌های فراگیر گرافِ فوق عبارت است از:

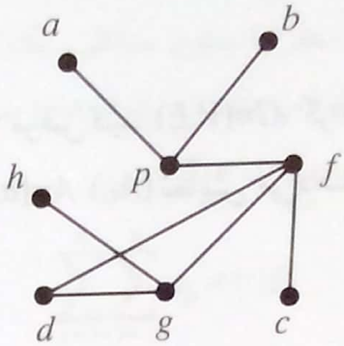


شکل ۴-۲۱.

زیرگراف G-v: زیرگرافی است که از حذف رأس v از مجموعه رئوس گراف G و حذف تمام یال‌های متصل به v بدست می‌آید.

زیرگراف G-e: زیرگرافی است که از حذف یال e از مجموعه یال‌های گراف G به‌دست می‌آید. به‌عبارت دیگر $V(G\text{-}e)=V(G)$ و $E(G\text{-}e)=E(G)\text{-}\{e\}$

مثال ۴-۱۷: گرافِ G در شکل زیر داده شده است.

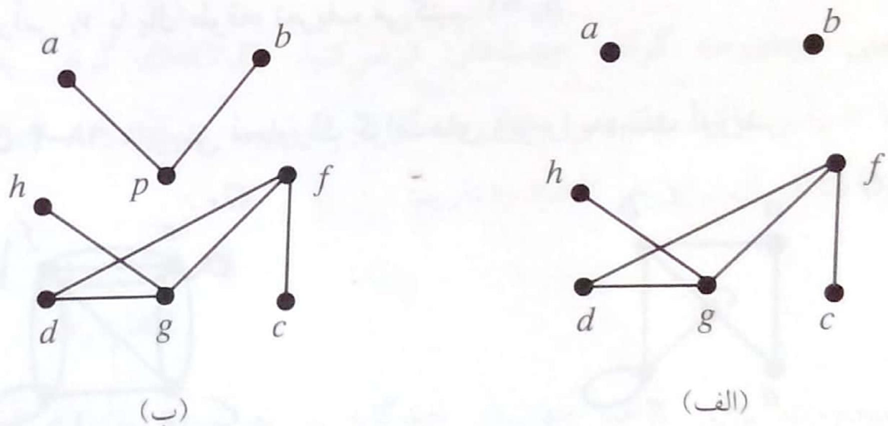


شکل ۴-۲۲.

الف) زیرگراف G-p را به‌دست آورید.

ب) زیرگراف G-pf را به‌دست آورید.

حل:



شکل ۴-۲۳.

۴-۴- نمایش گراف و یکریختی گراف‌ها

۴-۴-۱- نمایش گراف

یکی از مهم‌ترین کاربردهای گراف، مدل‌سازی موضوعات گوناگون مانند طراحی نقشهٔ شبکه بزرگ متروی شهری و آبراه‌ها و بررسی آن‌ها می‌باشد. باتوجه به حجم زیاد

اطلاعات و عدم وجود فضای کافی، می‌توان از ماتریس برای نمایش گرافِ این نقشه‌ها استفاده نمود. در ادامه، ماتریس مجاورت و ماتریس وقوع، که ماتریس‌هایی برای نمایش‌گراف می‌باشند، معرفی می‌شوند. با استفاده از این دو ماتریس، به‌عنوان مثال می‌توان ارتباط نقاط شهری با یکدیگر و یا ارتباط هریک از نقاط شهری با یکی از خطوط ارتباطی را نمایش داد.

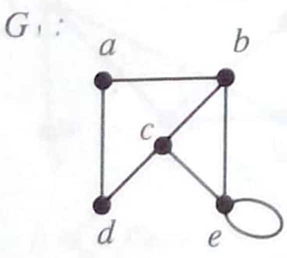
ماتریس مجاورتِ گراف: فرض‌کنید $G=(V,E)$، گراف سادهٔ n رأسی باشد. ماتریسِ مجاورت گراف G را با $A=[a_{i,j}]_{n\times n}$ (A_G) نمایش می‌دهند که در آن:

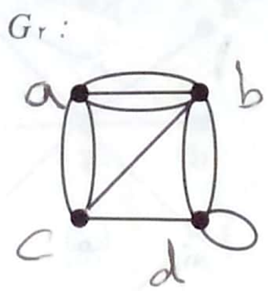
$$a_{ij}=\begin{cases} ۱ & v_iv_j \in E \\ ۰ & v_iv_j \notin E \end{cases}$$

و $v_i, v_j \in V$.

ماتریس مجاورت برای گراف دارای طوقه و یا یال‌های چندگانه نیز تعریف‌می‌شود، در این‌صورت ماتریس مجاورت، ماتریسی با درایه‌های صفر- یک نمی‌باشد، زیرا برای رئوس v_i و v_j با یال‌های چندگانه، a_{ij} برابرِ تعداد یال‌های بین آن دو رأس می‌باشد؛ و برای هر رأس v_i با یال طوقه، تعریف می‌کنیم: $a_{ii}=۱$.

مثال ۴-۱۸: ماتریس مجاورتِ گراف‌های زیر را به‌دست آورید.





شکل ۴-۲۴.

حل:

$$A_{G_۱}=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{array} \quad , \quad A_{G_۲}=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

نکات زیر در ماتریس مجاورت گراف برقرار است:

- ماتریس مجاورت گراف، متقارن است.
- درگراف‌های فاقد طوقه، مجموع درایه‌های هر سطر یا ستون با درجهٔ رأس نظیر آن سطر یا ستون، برابر است. درصورت وجود طوقه در گراف، به ازای هر طوقه، به مجموع سطر یا ستون متناظر، یک واحد اضافه می‌شود.
- درگراف‌های فاقد طوقه، مجموع درایه‌های ماتریس با مجموع درجه‌های گراف، برابر است. به عبارت دیگر:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = ۲\,|E|$$

درصورت وجود طوقه درگراف، به ازای هر طوقه، به مجموع فوق یک واحد اضافه می‌شود.

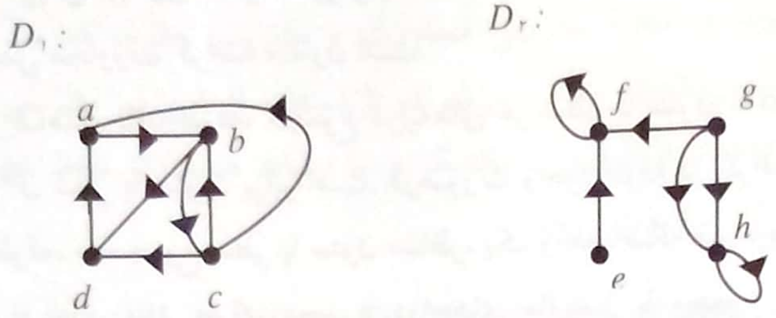
- در گرافِ سادهٔ G، درایهٔ قطر اصلی ماتریس $A^{۲}$ ، درجهٔ رئوس گراف را نشان‌می‌دهد.

ماتریس مجاورت گرافِ جهت‌دار: فرض‌کنید $D=(V,E)$ گرافی بدون یال چندگانه با n رأس باشد. ماتریسِ مجاورت گرافِ D نیز با $A=[a_{i,j}]_{n\times n}$ (A_G) نمایش داده می‌شود که در آن برای هر $v_i ,v_j\in V$ داریم:

$$a_{ij}=\begin{cases} ۱ & (v_i,v_j)\in E \\ ۰ & (v_i,v_j)\notin E \end{cases}$$

ماتریس مجاورت برای گرافِ جهت‌دار چندگانه نیز تعریف‌می‌شود، در این‌صورت ماتریس مجاورت، ماتریسی با درایه‌های صفر- یک نمی‌باشد ، برای رئوس v_i و v_j با یال‌های چندگانه، a_{ij} برابر تعداد یال‌های است که از رأس v_i خارج و به رأس v_j وارد می‌شود.

مثال ۴-۱۹: ماتریس مجاورتِ گراف‌های شکل ۴-۲۵ را به‌دست آورید.



شکل ۴-۲۵.

حل:

$$A_{D_1} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{و} \quad A_{D_2} = \begin{array}{c} \\ e \\ f \\ g \\ h \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e & f & g & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

▶

نکات زیر در ماتریس مجاورت گرافِ جهت‌دار برقرار است:

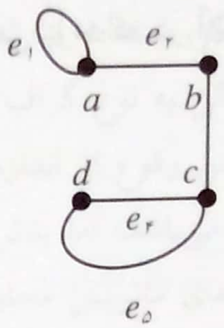
- ماتریس مجاورت گرافِ جهت‌دار، الزاماً متقارن نیست.
- در ماتریس مجاورت گرافِ جهت‌دار، جمع درایه‌های هرسطر با درجهٔ خروجی رأس متناظر آن سطر در گراف، برابر است.
- در ماتریسِ مجاورت گرافِ جهت‌دار، جمع درایه‌های هرستون با درجهٔ ورودی رأس متناظر آن در گراف برابر است.

ماتریس وقوعِ گراف: فرض‌کنید گرافِ $G=(V,E)$، دارای n رأس و m یال باشد، قراردهید $E=\{e_j : j=1,2,\ldots,m\}$ ماتریس وقوع G با $M=[m_{ij}]_{n\times m}$ (M_G) نمایش داده می‌شود؛ که در آن هر m_{ij} ارتباط بین رأس v_i و یال e_j را نشان می‌دهد، و:

$$m_{ij}=\begin{cases} 1 & e_j=v_iv_k\in E \text{ یا } e_j=v_kv_i\in E \\ 0 & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$$

که $v_i, v_j\in V$.

مثال ۴-۲۰: ماتریس وقوعِ گراف زیر را بیابید.



شکل ۴-۲۶.

حل:

درگرافِ فوق $V=\{a,b,c,d\}$ و $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ می باشد. ماتریس وقوع، یک ماتریس ۵×۴ است که سطرهای آن معرف رئوس گراف و ستون‌های آن بیانگر یال‌های گراف است؛ بنابراین:

$$M_G=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

نکات زیر در ماتریس وقوع گراف، برقرار است:

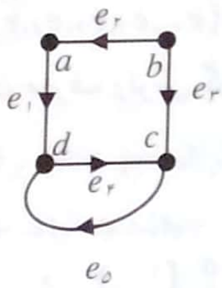
- مجموع اعداد در هر ستون ۲ است؛ زیرا هر ستون معرف یک یال بوده و هر یال تنها دوسر دارد. در صورتی‌که گراف دارای یال طوقه باشد، مجموع اعداد ستون مذکور، ۱ خواهد بود.
- در گرافِ فاقد یال طوقه، مجموع اعداد در هر سطر برابر با درجهٔ آن رأس است؛ زیرا هر سطر بیانگر تعداد یالی است که رأس متناظر یکی از دو سر آن است.

ماتریس وقوع گراف جهت‌دار: فرض‌کنید گراف جهت‌دار $D=(V,E)$ دارای n رأس و m یال باشد، قراردهید $E=\{e_j : j=۱,۲,...,m\}$ ماتریس وقوع D را با $M=[m_{ij}]_{n\times m}$ (M_D) نمایش داده می‌شود؛ که در آن هر m_{ij} ارتباط بین رأس v_i و یال e_j را نشان می‌دهد، و:

$$m_{ij}=\begin{cases} -۱ & e_j=(v_i,v_k)\in E \\ ۱ & e_j=(v_k,v_i)\in E \\ ۰ & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$$

و $v_i\,,v_j\in V$

مثال ۴-۲۱: ماتریس وقوع گراف زیررا بیابید.



شکل ۴-۲۷.

حل:

$$M_D=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_۱ & e_۲ & e_۳ & e_۴ & e_۵ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

نکات زیر در ماتریس وقوع گراف جهت‌دار، برقرار است:

- مجموع اعداد در هر ستون ۰ است؛ زیرا هر ستون معرف یک یال بوده و هر یال تنها دوسر دارد.
- درهر سطر مجموع (۱)ها با درجهٔ ورودی، مجموع (۱-)ها با درجه خروجی و مجموع قدرمطلق آن‌ها، با درجهٔ رأس متناظر آن سطر، برابر است.

با توجه به خصوصیت و ویژگی‌های ماتریس مجاورت و ماتریس وقوع، این سؤال مطرح می‌شودکه: حافظه‌ای که ماتریس وقوع نیازدارد بیشتراست یا حافظه مورد نیاز ماتریس مجاورت؟ به‌عبارت دیگر، استفاده از کدام نوع ماتریس مقرون به‌صرفه است؟ پاسخ به این سؤال کاملاً بستگی به نوع گراف و به‌خصوص تعداد یال‌ها دارد؛ به‌این مفهوم‌که، درگراف تهی، ماتریس وقوع از اندازه $|E|\times|V|=0$است، ولی ماتریس مجاورت همواره از اندازه $|V|\times|V|$ می‌باشد؛ اما بدترین حالت زمانی‌است که گراف کامل باشد؛ دراین حالت، تعداد یال‌های ماتریس مجاورت مضربی از $|V|\times|V|=|V|^2$ و تعداد یال‌های ماتریس وقوع مضربی از $|V|^3$ است؛ بنابراین حجم ماتریس مجاورت در این حالت کم‌تر است.

۴-۲-۴- یکریختی گراف‌ها

گراف‌های یکریخت: دو گرافِ ساد $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ را یکریخت گویند، هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا مانند $f: V_1\to V_2$ بتوان یافت طوری‌که:

$$\forall\, v_i, v_j\in V_1: \qquad v_iv_j\in E_1 \Leftrightarrow f(v_i)f(v_j)\in E_2$$

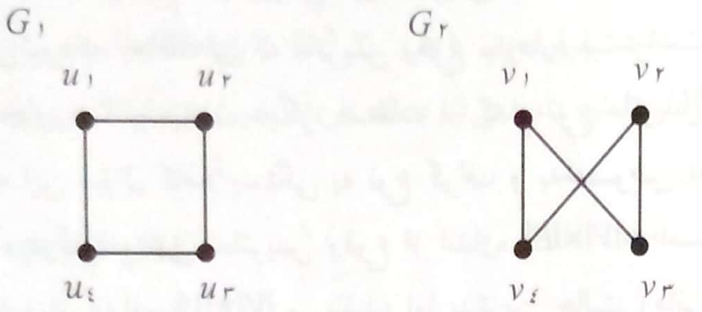
شرایط لازم برای یکریختی:

بنا به تعریفِ یکریختی، برای اینکه دوگرافِ G_1 و G_2 یکریخت باشند، باید:

- $|E_1|=|E_2|\ ,\ |V_1|=|V_2|$
- تعداد رئوس از درجهٔ k در گرافِ G_1 با تعداد رئوس از درجهٔ k در گرافِ G_2، برابر است.

برای بیان ویژگی f (حفظ ارتباط رئوس با یکدیگر در دو گراف)، می‌توان نشان داد ماتریس مجاورت گرافِ G_1 با ماتریس مجاورت گراف G_2 مطابق با سطر و ستون‌های تابعِ تعریف شده روی G_1، یکسان هستند؛ به عبارت دیگر با انجام اعمال سطری و یا ستونی مقدماتی از ماتریس G_1، می‌توان به ماتریس G_2 رسید.

مثال ۴-۲۲: آیا دو گراف G_1 و G_2 یکریخت می‌باشند؟



شکل ۴-۲۸.

حل:

تابع یک به یک و پوشای $f: G_1 \to G_2$ را می‌توان مطابق شکل ۴-۲۸، به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$f(u_1)=v_1 \qquad f(u_2)=v_3 \qquad f(u_3)=v_2 \qquad f(u_4)=v_4$$

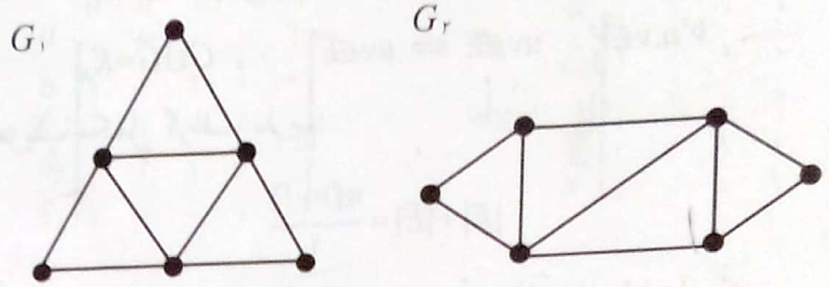
برای مشاهده حفظ ارتباط رئوس با یکدیگر، نشان‌می‌دهیم ماتریس مجاورت گراف G_1 با ماتریس مجاورت گراف G_2، یکسان است.

$$A_{G_1}=\begin{array}{c|cccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \hline u_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ u_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ u_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ u_4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{و} \quad A_{G_2}=\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_3 & v_2 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

مثال ۴-۲۳: آیا دو گراف G_1 و G_2، در شکل ۴-۲۹، یکریخت می‌باشند؟

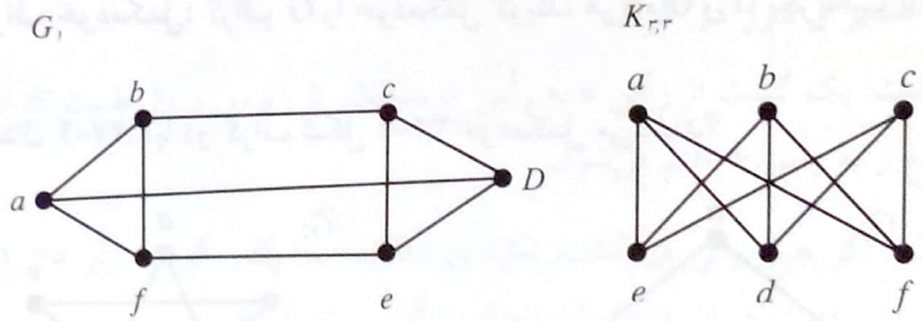
حل:

با توجه به شکل، هر دو گراف دارای ۶ رأس و ۹ یال می‌باشند، بنابراین باید تابع یک به یک و پوشایی را بیابیم که تحت آن گراف G_1 به گراف G_2 تبدیل شود؛ به عبارت دیگر، این تابع باید درجهٔ رئوس در گراف را حفظ نماید. از طرفی درجه‌های رئوس گراف G_1 به ترتیب صعودی برابر است با ۲،۲،۲،۴،۴،۴ و درجه‌های رئوس گراف G_2 به ترتیب صعودی برابر است با ۲،۲،۳،۳،۴،۴. بنابراین این دو گراف یکریخت نمی‌باشند.



شکل ۴-۲۹.

مثال ۴-۲۴: دو گراف زیر را درنظر بگیرید. هر دو گراف دارای ۶ رأس، ۹ یال و دنباله درجه‌های ۳،۳،۳،۳،۳،۳ می‌باشند، ولی این دو گراف یکریخت نیستند؛ زیرا در گراف $K_{3,3}$، ۳ رأس a، b و c وجود دارد که دو به دو با یکدیگر مجاور نمی‌باشند، ولی در گراف G_1 نمی‌توان ۳ رأس با این ویژگی یافت؛ به‌بیان دیگر درگرافِ $K_{3,3}$ زیرگرافی به شکل مثلث وجود ندارد، ولی در گرافِ G_1 چنین زیرگرافی وجود دارد.



شکل ۴-۳۰.

مثال ۴-۲۵: گراف $K_{m,n}$ و گراف $K_{n,m}$ یکریخت است.

۴-۵- مکملِ گراف

مکملِ گراف: فرض‌کنید $G=(V,E)$، گرافِ سادهٔ n رأسی باشد. گراف مکمل G، گراف ساده‌ای است که رئوس آن همان مجموعهٔ V و یال‌های آن، یال‌هایی است که در گراف G وجود ندارد. گرافِ مکمل را با نماد $\overline{G}=(V,\overline{E})$ نشان می‌دهند.

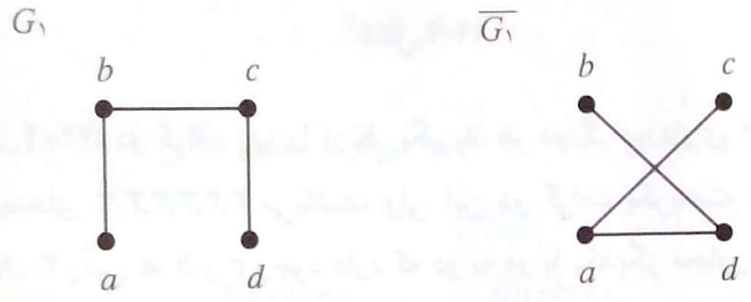
بنابراین:

$$\forall u,v \in V: \quad uv \notin E \Leftrightarrow uv \in \overline{E} \qquad , \quad G \cup \overline{G} = K_n$$

با توجه به تعریف مکملِ گراف، داریم:

$$|E| + |\overline{E}| = \frac{n(n-1)}{2}$$

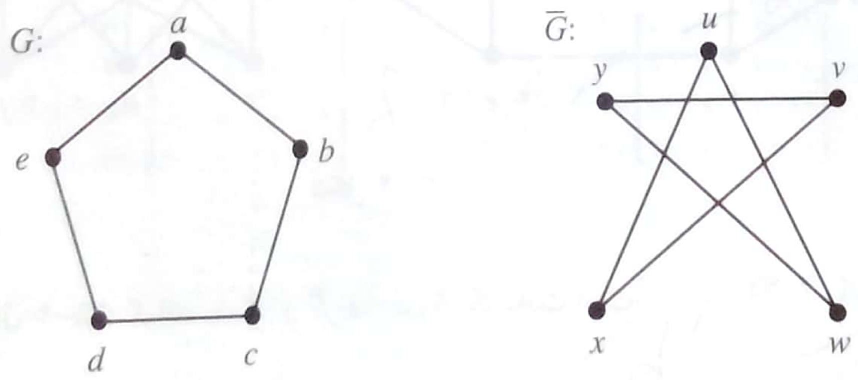
مثال ۴-۲۶: در شکل زیر، گراف G_1 و مکمل آن نشان داده شده است.



شکل ۴-۳۱.

گرافِ خودمکمل: گرافِ G را خودمکمل گویند، هرگاه G و $\overline{G}$ یکریخت باشند.

مثال ۴-۲۷: آیا دو گرافِ شکل ۴-۳۲ خودمکمل می‌باشند؟



شکل ۴-۳۲.

حل:

بله، تابع یک به یک و پوشای $f: G \to \overline{G}$ به صورت زیر را درنظر می‌گیریم:

$f(a)=u \qquad f(b)=w \qquad f(c)=y \qquad f(d)=v \qquad f(e)=x$

ملاحظه می‌شود ماتریس مجاورت دو گراف نیز یکسان است.

$$A_{\bar{G}}= \begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & & & & & \\ \end{array}$$

$$A_{\bar{G}}= \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} , \quad A_G= \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} u & w & y & v & x \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ w \\ y \\ v \\ x \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال ۴-۲۸: آیا گرافی که دارای ۱۰ رأس است، می‌تواند خودمکمل باشد؟

حل:

طبق تعریف گراف خودمکمل، تعداد یال‌های G و $\bar{G}$ با هم برابر می‌باشند، و بر اساس رابطهٔ $G \cup \bar{G}=K_{10}$، مجموع یال‌های آن‌ها با تعداد یال‌های K_{10} یعنی $\frac{10(10-1)}{2}=45$ برابراست؛ لذا نمی‌توان ۴۵ یال را به دو قسمت مساوی تقسیم کرد، پس چنین گرافی خود مکمل نیست.

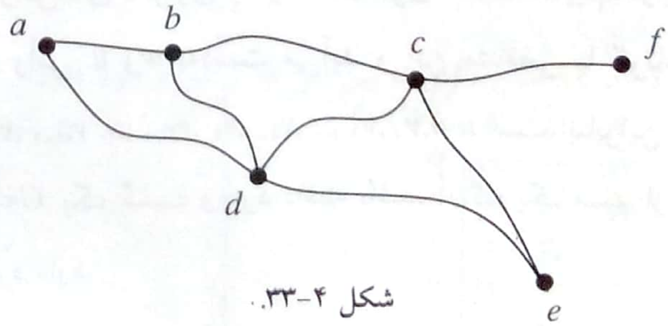
۴-۶- مسیر و دور در گراف

گشت: یک گشت از رأس u به رأس v، دنباله‌ای از رئوس و یال‌هاست که از رأس u شروع و به رأس v ختم می‌شود.

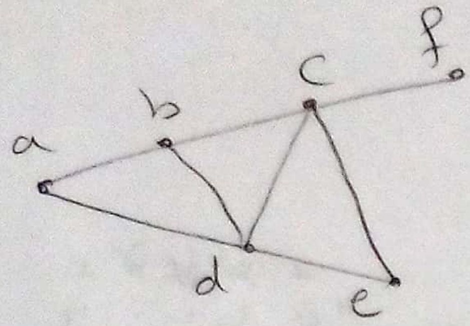
گذر: اگر هیچ یالی در گشت تکراری نباشد، آن‌را گذر گویند؛ اگر $v=u$ (یعنی رأس ابتدا و انتها یکسان باشد)، آن‌را **مدار** یا **گذر بسته** گویند.

مسیر: اگر هیچ رأسی در گشت تکراری نباشد، آن‌را مسیر گویند؛ اگر $v=u$، آن‌را **دور** یا یک **مسیر بسته** گویند.

مثال ۴-۲۹: گراف زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۴-۳۳.



در این گراف:

- گشت $bcdecf$ یک گذر است.
- گشت $bcdecf$ مسیر نیست، زیرا رأس c در آن تکرار شده است.
- گشت $fceda$ یک گذر است. این گشت مسیر نیز می‌باشد.
- گشت $abdceda$ یک گذر است و چون دو رأس ابتدا و انتها یکی است، این گشت، مدار نیز می‌باشد.
- گذر $abdceda$ چون دارای رأس تکراری d است، بنابراین مسیر نیست.
- گشت $abcda$ یک مسیر است، و از آنجا که دو رأس ابتدایی و انتهایی یکی است، این مسیر دور نیز می‌باشد.

▶

طولِ گشت: تعداد یال‌های پیموده شده در گشت از رأس u به رأس v، طول آن گشت نامیده می‌شود.

☑ **گزاره ۴-۲:** اگر بین دو رأس u و w در گرافِ $G=(V,E)$ یک گشت وجود داشته باشد، آن‌گاه یک مسیر از رأس u به رأس w در گراف وجود دارد.

اثبات:

چون یک گشت از u به w وجود دارد، پس یکی از گشت‌ها با کوتاه‌ترین طول را انتخاب می‌کنیم. به عنوان نمونه، گشت $u, v_1, v_2, \ldots, v_n, w$. اگر این گشت، مسیر نباشد، در این حالت داریم: $u, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{m-1}, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n, w$ به‌طوری‌که برای $k<m$ داریم: $v_k=v_m$؛ این امکان‌پذیر است، زیرا برای $k=0$، $u=v_m$ و برای $k=n+1$، $v_k=w$.

حال اگر رأس‌های تکراری را از گشت فوق حذف نماییم، دراین صورت گشت کوتاهی بین دو رأس u و w به‌دست می‌آید و این متناقض با کوتاه‌ترین گشت‌بودن $u\ u, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{m-1}, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n, w$ است. بنابراین اگر بین دو رأس در گرافِ $G=(V,E)$ یک گشت وجود داشته باشد، آن‌گاه یک مسیر از رأس u به رأس w در گراف وجود دارد.

■

☑ **قضیه ۴-۳:** فرض‌کنید A ماتریس مجاورت گراف $G=(V,E)$ یا گراف جهت‌دار $D=(V,E)$ (شامل یال موازی و یا طوقه) باشد؛ آن‌گاه تعداد مسیرهای متفاوت به‌طول k از رأس v_i به رأس v_j برابر است با درایهٔ a_{ij} در ماتریس A^k.

اثبات:

فرض‌کنید A ماتریس مجاورت گراف G با مجموعه راس‌های $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$. با استقرا روی تعداد مسیرها، می‌توان حکم را ثابت نمود.

بنابه تعریف ماتریس مجاورت، تعداد مسیرها به‌طول ۱ از v_i به v_j متناظربا درایهٔ $a_{i,j}$ در A است.

فرض‌استقرا: فرض‌کنید تعداد مسیرهای متفاوت به‌طول k از v_i به v_j متناظر با درایهٔ $a_{i,j}$ در A^k باشد.

می‌دانیم $A^{k+1}=A^k.A$ بنابراین درایهٔ $a_{i,j}$ در A^{k+1} برابر با $\sum_{r=1}^{n} b_{i,r}a_{r,j}$ است، که در آن $b_{i,r}$ متناظر با درایهٔ $a_{i,r}$ در A^k است. باتوجه به فرض استقراء، $b_{i,r}$ تعداد مسیرها به‌طول k از v_i به v_r می‌باشد. یک مسیر به‌طول $(k+1)$ از v_i به v_j، از مسیری به‌طول k از v_i به v_r(v_r دلخواه) و یک یال از v_r به v_j به‌دست می‌آید. $b_{i,r}$ تعداد مسیرها به‌طول k از v_i به v_r و $a_{r,j}$ تعداد یال‌ها از v_r به v_j می‌باشد، بنابراین $b_{i,r}a_{r,j}$ تعداد مسیرها به‌طول $(k+1)$ از v_i به v_j، با عبور ازهر رأس دلخواه v_r است؛ بنابراین تعداد کل مسیرهای متفاوت به‌طول $(k+1)$ از v_i به v_j، برابر با $\sum_{r=1}^{n} b_{i,r}a_{r,j}$ است.

■

مثال ۴-۳۰: گرافِ شکل ۴-۳۴ را درنظر بگیرید.

الف) چند مسیر متفاوت به‌طول ۳ بین دو رأس a و b وجود دارد؟

ب) چند نمونه از مسیرهای متفاوت بین دورأس a و b، به‌طول‌های ۳،۲،۱ و۴ را بیابید.

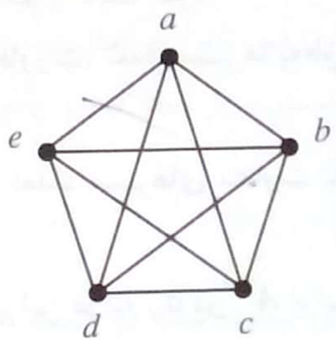
حل:

الف) طبق قضیهٔ ۴-۳، ۱۳ مسیرمتفاوت بین این دو رأس وجود دارد

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow A^3 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 12 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 12 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 12 \end{bmatrix} \end{array}$$

ب)

- ab : مسیر به‌طول ۱.
- aeb,adb,acb : مسیرهایی به‌طول ۲.
- $aedb,aecb,adeb,adcb,acdb,aceb$: چند نمونه ازمسیرهایی به‌طول ۳.
- $aedcb,aecdb,acdeb,acedb,adceb,adecb$: چند نمونه از مسیرهایی به‌طول ۴.



شکل ۴-۳۴.

۴-۶-۱- گراف همبند

گراف همبند: گرافِ $G=(V,E)$ را همبند گویند، هرگاه بین هردو رأس آن، حداقل یک مسیر موجود باشد، درغیر این‌صورت گراف را ناهمبند گویند.

مؤلفه(مؤلفهٔ همبندی): هرگرافِ ناهمبند، شامل چندین زیرگراف همبند است، که هرکدام رایک مؤلفهٔ همبندی می‌نامیم.

* با استقراء ثابت می‌شود در گراف همبند ساده با n رأس
$|E| \geq n-1$

همبندی در گرافِ جهت‌دار:

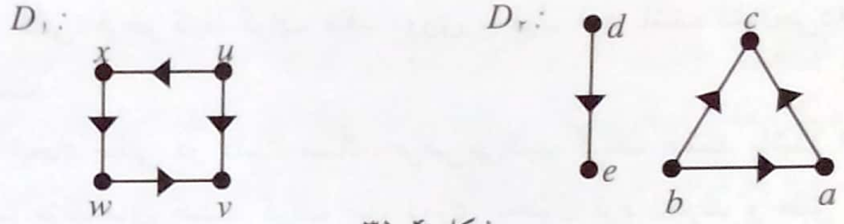
در گراف‌های جهت‌دار، سه نوع همبندی به شرح زیر مطرح می‌شود:

همبند قوی: گرافِ جهت‌دار را همبند قوی گویند، هرگاه بین هر دو رأس دلخواه آن، حداقل یک مسیر جهت‌دار وجود داشته‌باشد.

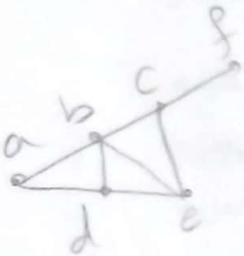
همبند یک‌طرفه: گرافِ جهت‌دار را همبند یک‌طرفه گویند، هرگاه بین هر دو رأس دلخواه آن، حداقل از یک‌طرف مسیر وجود داشته‌باشد.

همبند ضعیف: گرافِ جهت‌دار را همبندضعیف گویند، هرگاه بدون درنظرگرفتن جهت، بین هر دو رأس دلخواه آن مسیری موجود باشد. به‌عبارت دیگر، گراف زمینهٔ آن همبند باشد.

مثال ۴-۳۱: کدام‌یک از گراف‌های شکل زیر، همبند و کدام‌یک ناهمبند هستند؟



شکل ۴-۳۵.



حل:

گراف D_1 همبند یک‌طرفه و گراف D_2 ناهمبند و دارای دو مؤلفهٔ همبندی است.

▶

رأس برشی: رأس v در گرافِ همبند G، رأس برشی نامیده می‌شود، هرگاه زیرگرافِ $G\text{-}v$ ناهمبند شود.

پل: یال e، یک پل برای گرافِ همبند G است، هرگاه زیرگرافِ $G\text{-}e$ ناهمبند باشد.

مثال ۴-۳۲: در گراف مثال ۴-۲۹، رأس c، رأس برشی و یال cf، پل می‌باشد.

▶

قضیه ۴-۴: گرافِ سادهٔ $G=(V,E)$، دوبخشی است اگر و تنها اگر فاقد دوری به‌طول فرد باشد.

اثبات:

شرط لازم: فرض‌کنید گرافِ سادهٔ G دوبخشی است، نشان‌می‌دهیم فاقد دوری به‌طول فرد است.

فرض‌کنید $G= V_1\cup V_2$ که در آن $V_1=\{v_1,v_2,...,v_m\}$ و $V_2=\{w_1,w_2,...,w_n\}$. با توجه به ساختار گرافِ دوبخشی، هر دور در گرافِ دوبخشی به یکی از صورت‌های زیر است:

$v_{i_1}, w_{j_1}, v_{i_2}, w_{j_2}, ..., v_{i_s}, w_{j_s}, v_{i_1}$

$w_{k_1}, v_{l_1}, w_{k_2}, v_{l_2}, ..., v_{l_r}, w_{k_r}, w_{k_1}$

درحالت اول طول دور $2s$ و درحالت دوم طول دور $2r$ می‌باشد؛ بنابراین گراف دوبخشی G، فاقد دوری به‌طول فرد است.

شرط کافی: فرض‌کنید گراف فاقد دوری به‌طول فرد باشد، نشان‌می‌دهیم گراف دوبخشی است.

بدون ایجاد خللی در کلیت مسأله، فرض‌می‌کنیم گراف همبند باشد(اگر گراف همبند نباشد، مؤلفه‌های همبندِ گراف نیز، دوری به‌طول فرد ندارند و طبق اثباتی که ارائه‌می‌شود، مؤلفه‌های همبند، دوبخشی خواهند شد و درنتیجه، گراف دوبخشی خواهد بود).

فرض‌کنید a یک رأس دلخواه از G باشد، بنابه همبندی گراف، بین هر دو رأس دلخواه آن، حداقل یک مسیر وجود دارد؛ تعریف می‌کنیم:

$V_1=\{v\in V|$ مسیری به‌طول زوج از a به v باشد $\}$

$V_2=V-V_1$

بنابراین $a\in V_1$(مسیری به‌طول صفر است)؛ با استفاده ازبرهان خلف می‌توان نشان‌داد $V_1\cap V_2=\emptyset$ (اثبات برعهدهٔ دانشجو)، بنابراین V_1 و V_2 مجموعهٔ V را افرازمی‌کنند. ادعامی‌کنیم V_1 و V_2 مستقل می‌باشند؛ به‌عبارت دیگر، هیچ دو رأس مجموعهٔ V_1 به‌هم متصل نمی‌باشند و هم‌چنین هیچ دو رأس مجموعهٔ V_2 به‌هم متصل نمی‌باشند.

فرض‌کنید $u,v\in V_1$ ، پس از a به u و از a به v به ترتیب مسیرهایی به‌طول زوج مانند $a\to v_i\to v_{i+1}\to ...\to v_{i+k}\to u$ و $a\to w_j\to w_{j+1}\to ...\to w_{j+s}\to v$ وجود دارد؛ اگر یال uv موجود باشد، آن‌گاه طول دور زیر، فرد است؛ و این متناقض با فرض مسأله می‌باشد.

$$a\to v_i\to v_{i+1}\to ...\to v_{i+k}\to u\to v\to w_{j+s}\to ...\to w_{j+1}\to w_j\to a$$

بنابراین هیچ‌کدام از رئوس مجموعهٔ V_1 با هم در ارتباط نمی‌باشند؛ به‌همین ترتیب اعضای مجموعه V_2 نیز با هم در ارتباط نیستند. پس گراف G دوبخشی است.

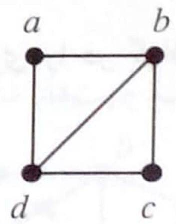
■

۴-۶-۲- گراف اویلری

گذر اویلری: گذری که از تمام یال‌های گراف عبورکند، گذر اویلری می‌نامند. به‌عبارت دیگر، گشتی که از تمام یال‌های گراف، فقط یکبار عبور نماید، گذر اویلری گویند.

مدار اویلری: مداری که از تمام یال‌های گراف عبورکند، مدار اویلری نام دارد. به‌عبارت دیگر، مدار اویلری، گشتی که از تمام یال‌های گراف فقط یکبار عبور نموده و به نقطهٔ شروع بازگردد. گراف دارای مدار اویلری، **گراف اویلری** نامیده می‌شود.

مثال ۴-۳۳: گراف شکل زیر،گذر اویلری $bcdbad$ دارد، ولی مداراویلری ندارد.



شکل ۴-۳۶.

▶

قضیه ۴-۵: گرافِ همبند(چندگانه) G دارای مدار اویلری است، اگر و تنها اگر G همبند بوده و درجهٔ تمام رئوس آن زوج باشد.
اثبات در [۴] قضیهٔ ۳-۱۱ بیان شده است.

■

قضیه ۴-۶: گرافِ همبند(چندگانه)G دارای گذر اویلری است اگر و تنها اگر G دقیقاً دارای دو رأس از درجهٔ فرد باشد.
اثبات در [۴] قضیهٔ ۲-۱۱بیان شده است.

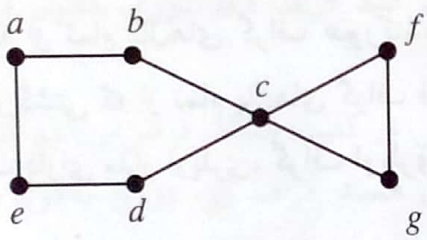
■

طبق قضیهٔ ۴-۶، گذر اویلری، از یک رأس فرد شروع و به رأس فرد دیگر، ختم می‌شود.

مثال ۴-۳۴: طبق قضیهٔ ۴-۵، گراف $K_{m,n}$ برای m و n زوج، اویلری است.

▶

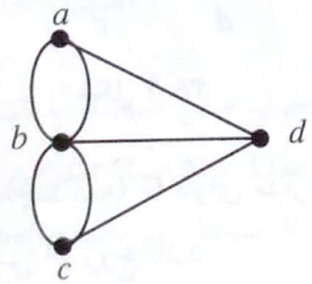
مثال ۴-۳۵: طبق قضیهٔ ۴-۵، گراف زیر مدار اویلری دارد و $bcfgcdeab$, $cfgcdeabc$, $abcfgcdea$ همگی مدارهای اویلری آن می‌باشند.



شکل ۴-۳۷.

▶

مثال ۴-۳۶: گذر و مدار اویلری را در گراف شکل ۴-۳۸، در صورت وجود بیابید.



شکل ۴-۳۸

حل:

$$deg(a)=deg(c)=deg(d)=۳, \qquad deg(b)=۵$$

طبق قضیهٔ ۴-۵ ، گراف فوق مدار اویلری ندارد؛ گراف ۴ رأس از درجهٔ فرد دارد و بنا به قضیهٔ ۴-۶، گذر اویلری نیز ندارد.

▶

☑ **قضیه ۴-۷:** گرافِ (چندگانه) D دارای مدار اویلری جهت‌دار است اگر و تنها اگر D همبند ضعیف بوده و درجهٔ ورودی هر رأس برابر درجهٔ خروجی آن باشد. یعنی:

$$\forall u_i \in V \quad od(u_i)=id(u_i)$$

اثبات در [۴] فصل ۱۱ بیان شده است.

■

☑ **قضیه ۴-۸:** گرافِ(چندگانه) D دارای گذر اویلری آن است اگر و تنها اگر D همبند ضعیف بوده و به غیر از دو رأس $v_۱$ و $v_۲$، درجهٔ ورودی و خروجی سایر رئوس برابر باشند و برای دو رأس $v_۱$ و $v_۲$ داشته باشیم:

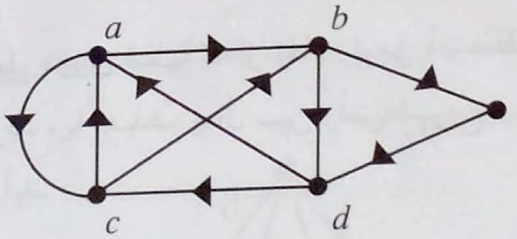
$$id(v_۱)=od(v_۱)+۱$$
$$od(v_۲)=id(v_۲)+۱$$

در این صورت، گذر اویلری از رأس $v_۲$ شروع و به رأس $v_۱$ ختم می‌شود.
اثبات در [۴] فصل ۱۱ بیان شده است.

■

مثال ۴-۳۷: مدار اویلریِ گرافِ جهت‌دار شکل زیرعبارتست از: $abedcacbda$

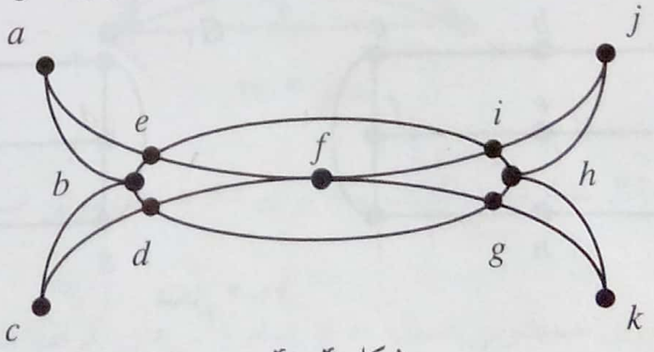
$id(v) = od(v)$
$v \in \{a, b, c, d, e\}$



شکل ۴-۳۹.

▶

مثال ۴-۳۸: برای گراف زیر بررسی نمایید، آیا گذر و مدار اویلری وجود دارد یا خیر؟



شکل ۴-۴۰.

Scanned by CamScanner

حل:

طبق قضیهٔ ۴-۵، گراف مدار اویلری دارد، به‌عنوان نمونه *abdghijhkgfdcbeifea* یک مدار اویلری آن است. واضح است که گذر اویلری ندارد.

۴-۶-۳- گراف همیلتونی

مسیرهمیلتونی: مسیری است که از تمامی رئوس گراف عبور کند. به‌عبارت دیگر، گشتی که از تمام رئوس گراف فقط یکبار عبور نماید، مسیر همیلتونی نامیده می‌شود.

دور همیلتونی: دوری است که از تمامی رئوس گراف عبور کند. به‌عبارت دیگر، گشتی که از تمام رئوس گراف فقط یکبار عبور نماید و به رأس شروع بازگردد، دور همیلتونی نامیده می‌شود. به گرافی که دور همیلتونی دارد، **گراف همیلتونی** گویند.

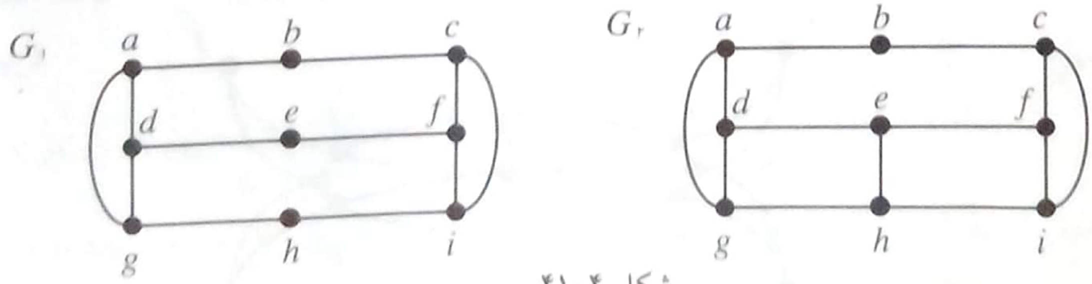
گزاره ۴-۳: اگرگرافِ G دارای دورهمیلتونی باشد، آن‌گاه G دارای مسیرهمیلتونی است.

اثبات:

بنابرفرض، گراف شامل دوری است که از تمام رئوس آن فقط یکبار عبور کرده و به رأس شروع باز می‌گردد ، با حذف یال بین رأس شروع و رأس خاتمهٔ دور، مسیر همیلتونی به‌دست می‌آید.

■

مثال ۴-۳۹: در گراف‌های زیر مسیر و دور همیلتونی را بررسی نمایید.

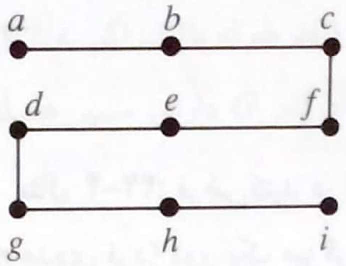


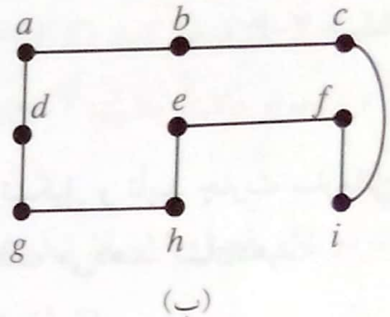
شکل ۴-۴۱.

حل:

گراف G_1 دور همیلتونی ندارد، ولی مطابق شکل ۴-۴۲(الف) دارای مسیر همیلتونی $abcfedghi$ است.

گراف G_2، طبق گزارهٔ ۴-۴، دارای مسیر همیلتونی $abcifedgh$ و مطابق شکل ۴-۴۲(ب)، دارای دور همیلتونی $abcifehgda$ است.



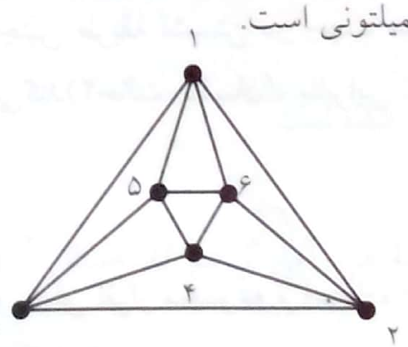


شکل ۴-۴۲.

باتوجه به مثال قبل، نتایج مفیدی جهت یافتن دور همیلتونی به‌دست می‌آید، ازآن‌جمله:

- اگر گراف G همیلتونی باشد، آن‌گاه داریم: $\forall v \in V : deg(v) \geq 2$.
- اگر $\exists v \in V : deg(v) = 2$ ، آن‌گاه دو یال مجزا و متصل به v، باید دردور همیلتونی قرارداشته باشند.

مثال ۴-۴۰: گراف هشت وجهی مقابل، یک گراف همیلتونی است. در این گراف دور ۱۲۳۴۵۶۱ یک دور همیلتونی است.



شکل ۴-۴۳.

مثال ۴-۴۱: نشان‌دهید گراف K_n برای $n > 2$ همیلتونی است.

حل:

بنابر تعریف، دوری همیلتونی است که از تمام رأس‌های گراف فقط یکبار عبور نماید.

به ترتیب زیر می‌توانیم دورهمیلتونی را بسازیم: از هر رأس دلخواهِ گراف شروع می‌کنیم، چون بین هر دو رأس گرافِ کامل یالی وجود دارد، پس بین هر دو رأس گراف، مسیری به‌طول یک می‌باشد؛ بنابراین می‌توانیم بدون تکرار رأسی، از هر رأس گراف به رأس دیگر رفت تا به آخرین رأس گراف برسیم، از طرفی بین رأس ابتدایی و رأس انتهایی مسیر، نیز یالی موجود است که با طی این مسیر، دور همیلتونی حاصل می‌شود.

مثال ۴-۴۲: فرض‌کنید در یک مؤسسه، جهت تشکیل و تأیید چارت سازمانی، n نفر(n عددی فرد) دور یک میزگرد تشکیل تعدادی جلسه می‌دهند. نشان‌دهید:

الف) به چند طریق این افراد می‌توانند دور این میزگرد بنشینند.

ب) اگر قرارباشد درهرجلسه، هر نفر تنها با دو نفر مجاور خود مذاکره نماید به‌طوری‌که در روزهای قبل مذاکره‌ای با آن دو صورت نگرفته است. چند جلسه باید به این طریق تشکیل‌شود قبل از اینکه دو نفر برای بار دوم باهم مذاکره نمایند؟

حل:

الف) می‌دانیم n نفر به تعداد $n!$ می‌توانند کنار یکدیگر بنشینند. از طرفی چون دور میزگرد می‌نشینند، بنابراین مکان‌هایی که نفر اول برای نشستن انتخاب می‌کند یکسان است(n حالت یکسان)، هم‌چنین طریقهٔ نشستن در جهت عقربه‌های ساعت یا خلاف آن حالت جدیدی ایجاد نمی‌کند(۲حالت یکسان)، بنابراین تعداد حالت برابر است با

$$\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}.$$

ب) این مثال را می‌توان با دو روش افراز مجموعه و استفاده از دور همیلتونی حل‌نمود.

روش اول: n نفر $v_1,\dots,v_n$ تشکیل دور $v_1,\dots,v_n,v_1$ می‌دهند، بنا به فرض مسأله هر نفر باید با $(n-1)$ نفر دیگر مذاکره نماید، به‌طوری‌که در هر جلسه مجاز است فقط با دو نفر مذاکره نماید که قبلاً مذاکره‌ای با آن دو نداشته است، این بدان معنی است که $(n-1)$ نفر باید به مجموعه‌های ۲ عضوی افراز شوند؛ بنابراین تعداد جلسه‌های موردنیاز، همان تعداد افرازها یعنی $\frac{n-1}{2}$ می‌باشد.

روش دوم: برای حل، گراف K_n با n رأسِ فرد درنظر می‌گیریم. گراف دارای $\frac{n(n-1)}{2}$ یال است. ازطرفی هر دورهمیلتونی دارای n یال است، بنابراین حداکثر $\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n} = \frac{(n-1)}{2}$ دور همیلتونی وجود دارد که یال مشترک ندارند.

▶

☑ **قضیه ۴-۹:** فرض‌کنید $G=(V,E)$ گرافی n رأسی و فاقد طوقه باشد. اگر به ازای هر u و v دلخواه داشته باشیم: $deg(u) + deg(v) \geq n-1$، آن‌گاه: G دارای مسیر همیلتونی است.

اثبات در [۴] فصل ۱۱ بیان شده است.

■

☑ **قضیه ۴-۱۰:** در گرافِ سادهٔ G، اگر برای هر $v \in V$ داشته باشیم: $deg(v) \geq \frac{n-1}{2}$، آن‌گاه G دارای مسیر همیلتونی است.

اثبات در [۴] فصل ۱۱ بیان شده است.

■

☑ **قضیه ۴-۱۱:** فرض‌کنید $G=(V,E)$ گرافی فاقد طوقه و $|V|=n \geq 3$. اگر برای هر دو رأس غیرمجاور u و v داشته باشیم: $deg(u) + deg(v) \geq n$، آن‌گاه G دارای دور همیلتونی است.

اثبات در [۴] فصل ۱۱ بیان شده است.

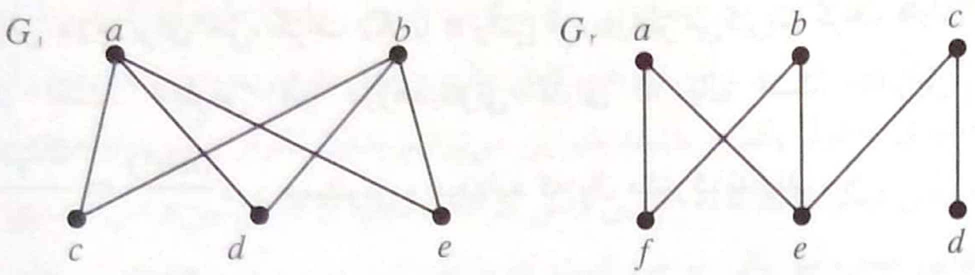
■

☑ **قضیه ۴-۱۲:** اگر درجهٔ هر رأس گراف G، حداقل $\frac{n}{2}$ باشد، آن‌گاه G دورهمیلتونی دارد.

اثبات در [۴] فصل ۱۱ بیان شده است.

■

مثال ۴-۴۳: کدام‌یک از گراف‌های دوبخشی زیر، دارای مسیر و دور همیلتونی هستند.



حل:

شکل ۴-۴۴.

گراف G_1 یک گراف $k_{2,3}$ است و ~~طبق قضیه ۴-۱۲~~، دورهمیلتونی ندارد. این گراف دارای مسیرهای همیلتونی $cadbe$ و $dbeac$ است.

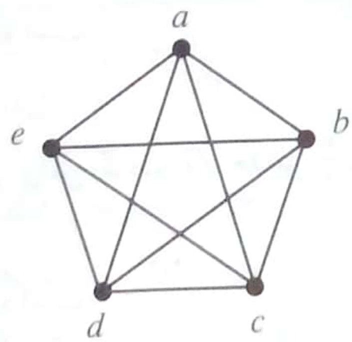
گراف G_2، دور همیلتونی ندارد؛ زیرا $deg(d)=1$. این گراف دارای مسیر همیلتونی $afbecd$ است.

▶

مثال ۴-۴۴: ۵ دانشجوی یک کلاس تصمیم گرفته‌اند، که هر شب شام را باهم و دور یک میزگرد صرف کنند. برای این منظور به هنگام صرف شام هر یک در کنار دو نفری می‌نشینند که در روزهای پیش کنار آن‌ها ننشسته‌اند. برای چند روز می‌توانند این کار را انجام دهند؟

حل:

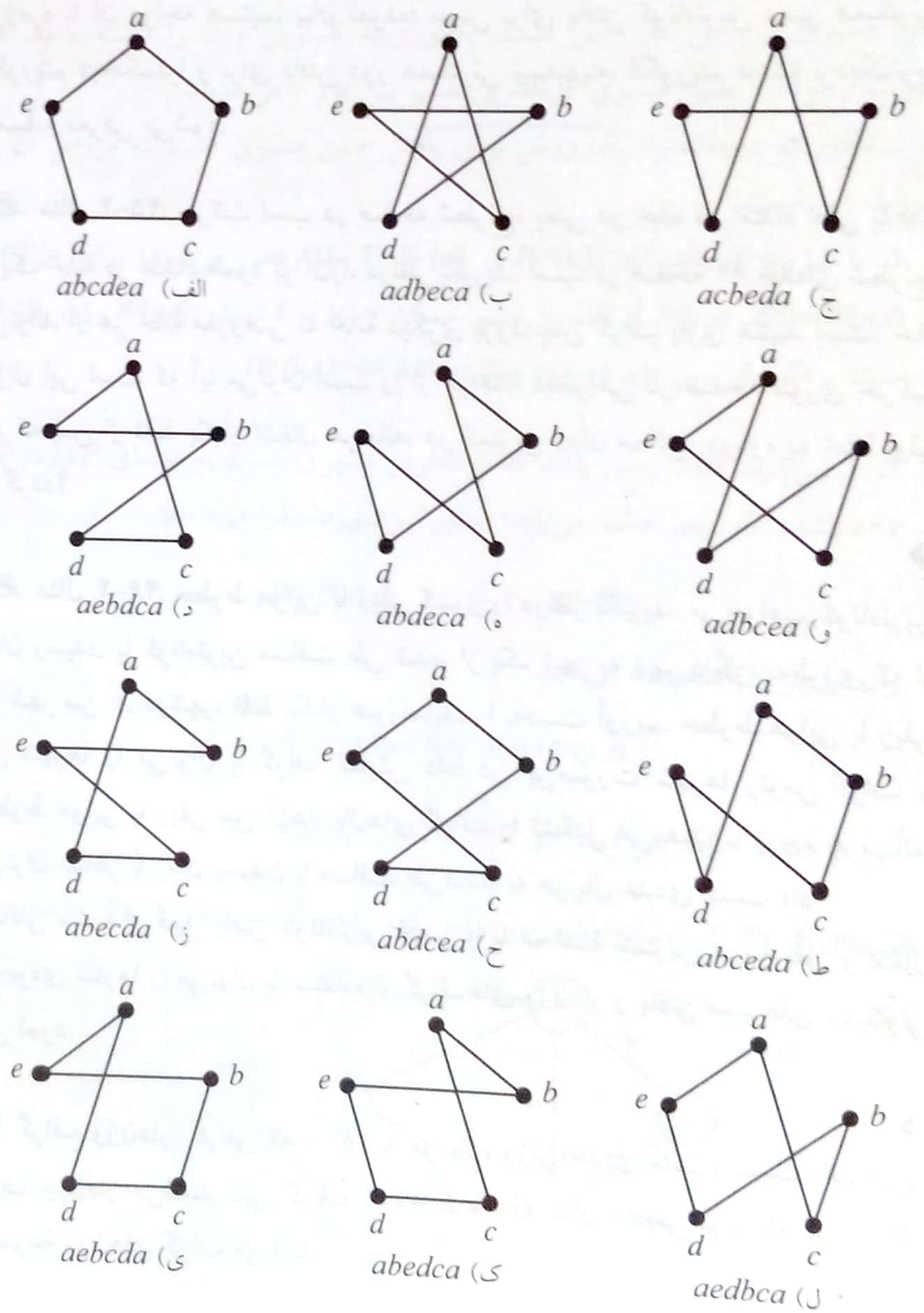
پاسخ این مسأله، معادل این است که تعداد دورهای همیلتونی در k_5 محاسبه شوند، به‌طوری‌که با یکدیگر یال مشترکی نداشته باشند.



شکل ۴-۴۵.

با توجه به مثال ۴-۴۲، تعداد دورهای همیلتونی k_5 برابر است با $\frac{(5-1)!}{2}=12$. از این تعداد، $\frac{(5-1)}{2}=2$ دور با یال‌های غیر مشترک وجود دارند.

در شکل ۴-۴۵ دورهای همیلتونی k_5 نشان داده شده است. مشاهده می‌شود، گراف شکل‌های ۴-۴۶(الف) و۴-۴۶(ب) یال مشترکی ندارند.



شکل ۴-۴۶.

۴-۶-۳-۱- کاربردهایی از مسیرها و دورهای همیلتونی

برای درک بهتر، ابتدا دو نمونه از کاربردهای مسیر و دور همیلتونی که در زندگی روزمره با آن مواجه هستیم، بیان نموده؛ سپس برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر همیلتونی، الگوریتم دیجکسترا و برای یافتن دور همیلتونی نیمه‌بهینه، الگوریتم قاعدهٔ نزدیک‌ترین همسایه معرفی می‌شود.

مثال ۴-۴۵: حرکت اسب در صفحه شطرنج، یعنی دو خانه در امتداد افقی یا قائم و یک خانه در امتداد عمود بر آن‌را، درنظر بگیرید. اسب در صفحهٔ ۶۴ خانه‌ای شطرنج، می‌تواند از هر خانهٔ مفروضی به خانهٔ دیگری برود؛ پس گرافِ بازی همبند است. حال سؤال این است که آیا می‌توان اسب را از هرخانهٔ دلخواهی در صفحه طوری حرکت داد که پس از فقط یکبار اشغال هرخانه، در کمترین زمان ممکن، دوباره به خانهٔ اولیه بازگردد؟

◀

مثال ۴-۴۶: خطوط هوایی یا ریلی کشور را درنظر بگیرید. می‌خواهیم کوتاه‌ترین زمان رسیدن یا کوتاه‌ترین مسافت طی شده، از یک شهر به شهر دیگر، به‌طوری که از هر شهر بین آن دوشهر، فقط یکبار عبورنماید، را به‌دست آوریم. خطوط هوایی یا ریلی بین شهرها را می‌توان با گراف نمایش داد؛ در این‌صورت شهرها رئوس گراف و خطوط هوایی یا ریلی بین آن‌ها، یال‌های گراف را تشکیل می‌دهند؛ با توجه به مسأله، می‌توان متناظر با زمان رسیدن یا مسافت طی‌شده، به هر یال عددی نسبت داد.
مسائلی مشابه از قبیل یافتن کوتاه‌ترین مسیر و یا محاسبهٔ کمترین هزینهٔ نقل و انتقال موجودی انبارها را می‌توان با استفاده از گراف‌های وزن‌دار و یافتن مسیرهای همیلتونی حل نمود.

◀

گرافِ وزن‌دار: گرافی که در آن به هر یال، وزنی(عددی مثبت) نسبت داده شود، گراف وزن‌دار می‌نامند. این گراف با $G=(V,E,W)$ نشان داده‌می‌شود، که در آن W، مجموعهٔ وزن‌های گراف می‌باشد.

• الگوریتم دیجکسترا

فرض‌کنید $G=(V,E,W)$ یک گرافِ وزن‌دار و u و v دو رأس از آن باشد. مسأله اصلی یافتن مسیری بین این دو رأس است، به‌طوری‌که کم‌ترین وزن را داشته باشد. در صورت وجود، به چنین مسیری کوتاه‌ترین مسیر بین u و v می‌گویند.

الگوریتم دیجکسترا، یک روش برای یافتن چنین مسیری است که مراحل آن به صورت زیر است.

۱. با شروع از رأس u، $P=\{u\}$ و $T=V-\{u\}$ مقداردهی می‌شود. برای هر $t\in T$، $l(t)=W(u,t)$ که $l(t)$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن از u به t است ($W(u,t)$ وزن یال ut است و اگر یالی بین u و t وجود نداشته باشد $W(u,t)=\infty$).

۲. فرض‌کنید $x\in T$ رأسی باشد که کوتاه‌ترین مسیر را نسبت به اعضای P دارد، اگر $x=v$ باشد، الگوریتم خاتمه می‌یابد؛ درغیر این‌صورت، قرارمی‌دهیم:

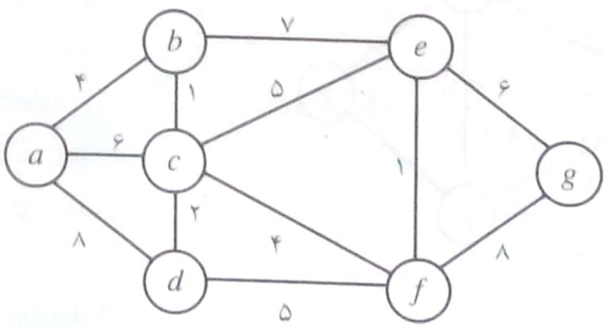
$$P'=P\cup\{x\} \quad , \quad T'=T-\{x\}$$

و برای هر $t\in T'$ تعریف می‌کنیم:

$$l'(t)=Min\{\ l(t)\ ,\ l(t)+W(x,t)\ \}$$

این مرحله با جایگزینی P با P' و T با T'، تکرار می‌شود.

مثال ۴-۴۷: کوتاه‌ترین مسیر بین رأس a و g در گراف شکل ۴-۴۷، را به‌دست آورید.

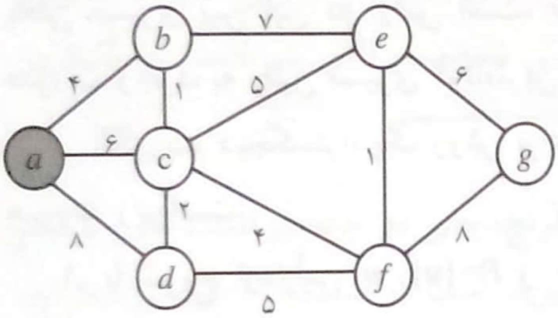


شکل ۴-۴۷.

حل:

مراحل الگوریتم و بررسی وضعیت هر رأس در ادامه توضیح داده شده است.

مرحله ۱:

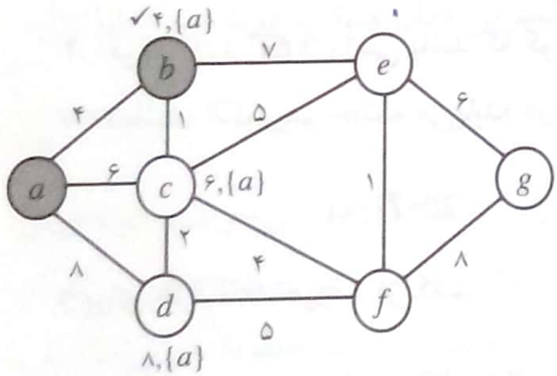


در این مرحله رأس a انتخاب می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$P=\{a\}$

$T=\{b,c,d,e,f,g\}$

مرحله ۲:

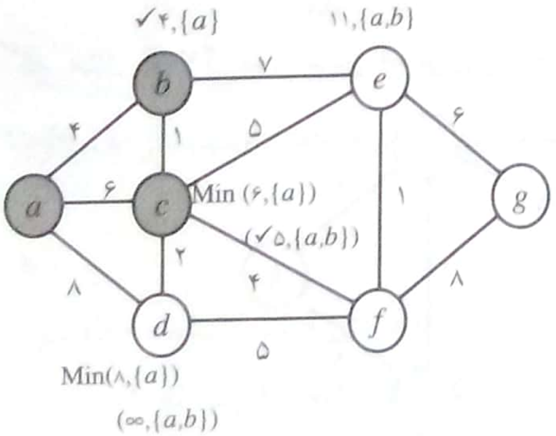


با توجه به رئوس P، مسیرهایی که از رأس a شروع شده و کوتاه‌ترین وزن را نسبت به رئوس مجموعهٔ T دارند، عبارتنداز: $ab=۴$، $ac=۶$ و $ad=۸$. پس کوچک‌ترین مسیر، $ab=۴$ است. بنابراین رأس b انتخاب می‌شود.

$P=\{a,b\}$

$T=\{c,d,e,f,g\}$

مرحله ۳:



با توجه به رئوس P، مسیرهایی که از رأس a شروع شده و یا از b می‌گذرد و کوتاه‌ترین وزن را نسبت به رئوس مجموعهٔ T دارند، عبارتند از: $ac=۶$، $ad=۸$ و $abc=۵$ است. کوچک‌ترین مسیر مربوط به $abc=۵$ است. بنابراین رأس c انتخاب می‌شود.

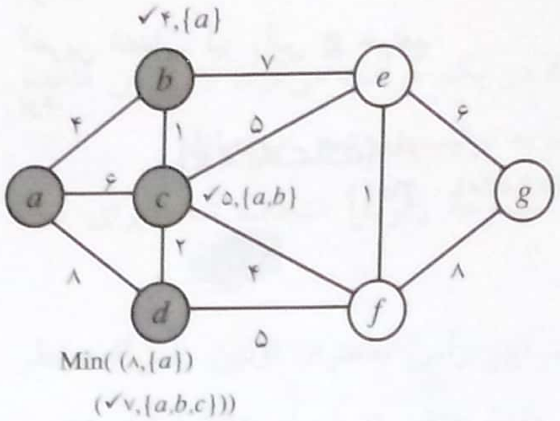
$P=\{a,b,c\}$

$T=\{d,e,f,g\}$

مرحله ۴:

مسیر رئوس P با دیگر رئوس مجموعهٔ T یعنی $\{d,e,f,g\}$ محاسبه می‌شود. همان‌طور که در شکل مقابل مشخص است، کوچک‌ترین مسیر مربوط به رأس d است و فاصله آن ۷ است.

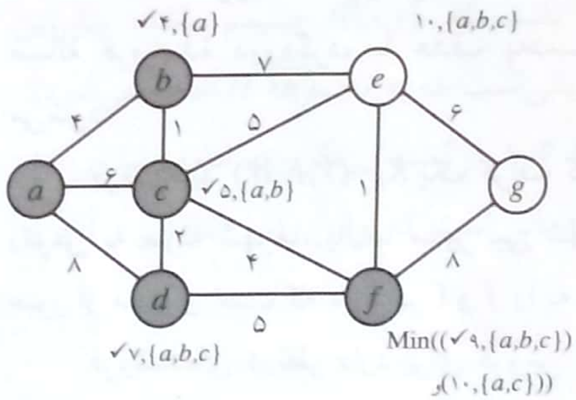
$P=\{a,b,c,d\}$
$T=\{e,f,g\}$



مرحله ۵:

همان‌طور که در شکل مقابل نشان داده است، انتخاب بعدی رأس f است.

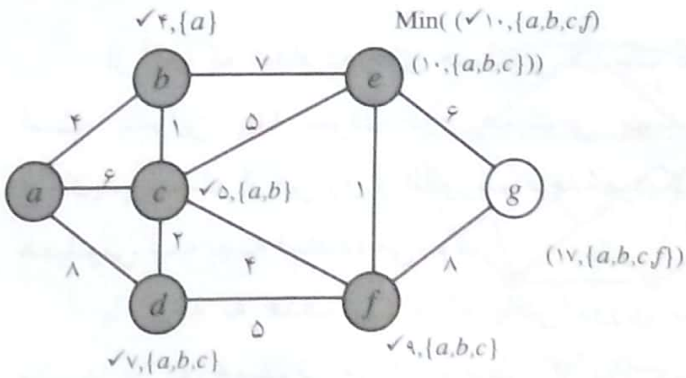
$P=\{a,b,c,d,f\}$
$T=\{e,g\}$



مرحله ۶:

انتخاب بعدی با توجه به مقادیر نشان داده شده در شکل، رأس e است.

$P=\{a,b,c,d,f,e\}$
$T=\{g\}$

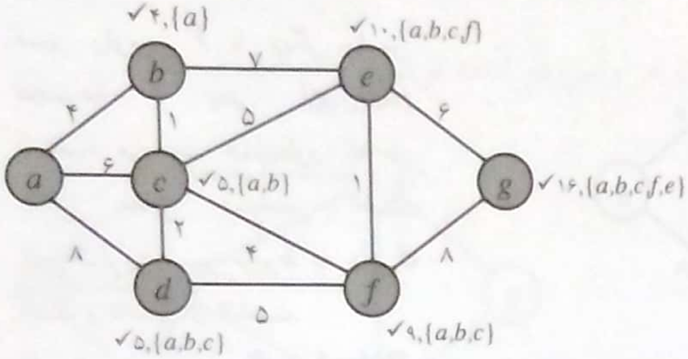


مرحله ۷:

آخرین انتخاب نیز رأس g خواهد بود.

$P=\{a,b,c,d,f,e,g\}$

$T=\{\}$



• مسأله فروشنده دوره‌گرد

مسألهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد، با هدف به‌دست آوردن دورهمیلتونی نیمه‌بهینه تعریف می‌شود.

فرض‌کنید $K_n=(V,E,W)$ یک گراف کاملِ وزن‌دار با n رأس باشد. در این گراف، رئوس به منزلهٔ شهرها، یال‌ها مسیر بین شهرها و $W(i,j)$ مسافت یا هزینه لازم برای عبور از مسیری است که دو شهر i و j را به هم وصل کرده است.

فروشنده‌ای درنظر دارد برای فروش کالای خود طوری حرکت‌نماید که از هر شهر فقط یکبار عبورکند و سرانجام به شهر خود بازگردد، به‌طوری‌که مسافت‌های طی شده(هزینه صرف شده برای طی مسیرها) حداقل باشد.

از آنجا که تعداد دورهای همیلتونی در یک گراف کامل با n رأس، برابر با $\frac{(n-1)!}{2}$ است، بنابراین پیدا نمودن دور همیلتونی بهینه، به‌خصوص برای nهای بزرگ، امکان‌پذیرنیست. از این رو از الگوریتم قاعدهٔ نزدیک‌ترین همسایه برای پیدا نمودن دور همیلتونی نیمه بهینه استفاده می‌شود.

با توجه به هدف مسأله که یافتن دوری با ماکزیمم یا مینیمم مجموع طول مسیرها در دورهمیلتونی می‌باشد، منظور از دور همیلتونی‌بهینه، دور همیلتونی‌است که هدف مسأله را برآورده سازد و با انتخاب هر دور دیگری، نتوان به هدف مسأله نائل آمد؛ هم‌چنین به دورهمیلتونی که نزدیک‌ترین مقدار هدف را با دور همیلتونی بهینه داشته باشد، دورهمیلتونی نیمه‌بهینه گویند.

- **قاعدهٔ نزدیک‌ترین همسایه**

برای به‌دست آوردن دورهمیلتونی نیمه‌بهینهٔ H در یک گراف، می‌توان از روش قاعدهٔ نزدیک‌ترین همسایه استفاده نمود. این الگوریتم به ترتیب زیرعمل می‌نماید:

۱. $H=\emptyset$ را مجموعهٔ یال‌ها و $P=\{\}$، مجموعهٔ رئوس انتخاب شده برای دور همیلتونی نیمه بهینه درنظر گرفته‌می‌شود.

۲. فرض‌کنید $x\in V$ رأسی دلخواه باشد. این رأس به‌عنوان اولین رأس P درنظر گرفته می‌شود. بنابراین $P=\{x\}$، هم‌چنین مقدار متغیر a را برابر $a=x$ قرارمی‌دهیم.

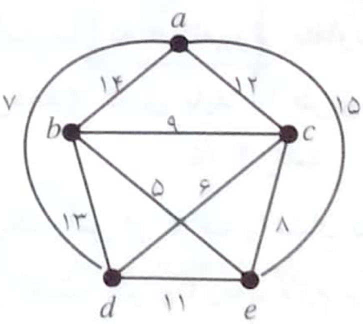
۳. برای $i=$۱ تا $j=n$-۱ مراحل زیر انجام می‌شود:

۳-۱.اگر $y\notin P$ و $y\in V$ رأسی باشد که $W(x,y)$ مینیمم باشد، بنابراین $H=H\cup\{xy\}$ و $P=P\cup\{y\}$ (xy یالی‌است که به مجموعهٔ H اضافه می‌شود).

۳-۲. $x\leftarrow y$ و به ابتدای مرحلهٔ ۳-۱ بازگشته و الگوریتم ادامه پیدا می‌کند.

۴. در آخرین مرحله $H=H\cup\{xa\}$ (xa یالی است که اولین رأس انتخابی و آخرین رأس انتخابی را به هم وصل می‌کند).

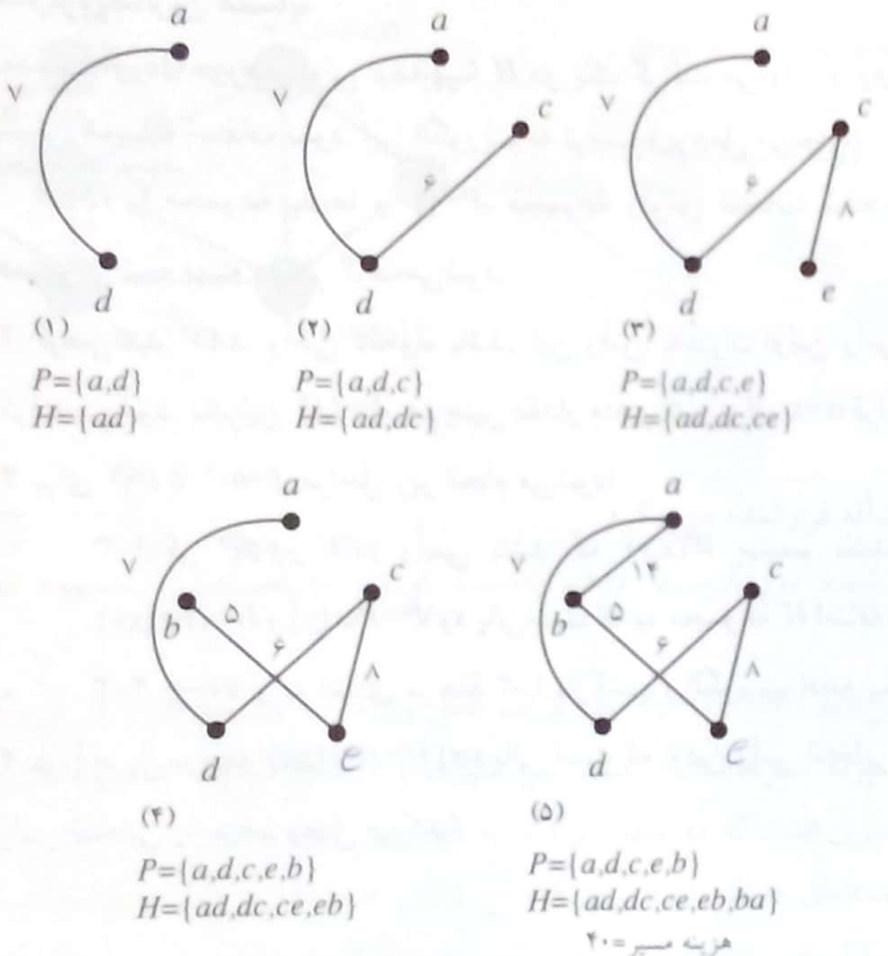
مثال ۴-۴۸: با استفاده از قاعدهٔ نزدیک‌ترین همسایه، دور همیلتونی نیمه‌بهینه را برای گراف شکل ۴-۴۸ بیابید.



شکل ۴-۴۸.

حل:

در ابتدا $P=\{a\}$، حال در ادامه، مراحل دور همیلتونی به صورت زیر است:



شکل ۴-۴۹.

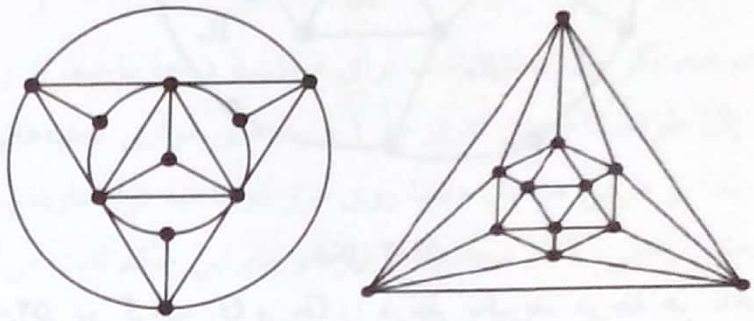
مثال ۴-۴۹: در یک فرآیند نیاز به n کامپیوتر متفاوت است (هر کامپیوتر وظیفهٔ منحصربفرد خود را انجام می‌دهد). کاری باید از طریق همهٔ این کامپیوترها، نه به ترتیب خاص، به انجام برسد.

فرض‌کنید هر کامپیوتر یک رأس از گراف را نشان دهد. آن‌گاه هر مسیرهمیلتونی در این گراف یک برنامهٔ زمانی است. اگر C_{ij} زمان لازم برای رفتن کار از کامپیوتر i به j باشد، مسألهٔ بهینه‌سازی عبارت است از، یافتن مسیری که کمترین مجموع هزینه‌های C_{ij} را داشته باشد.

۴-۷- گراف مسطح

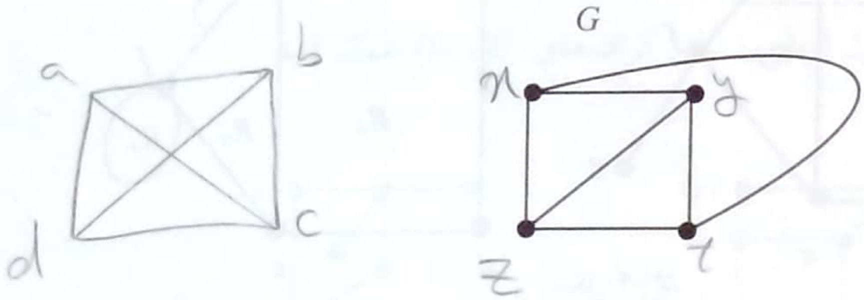
گراف مسطح: گراف $G=(V,E)$ را مسطح گوییم، هرگاه بتوان آن‌را به گونه‌ای در صفحه رسم کرد که یال‌های آن (به جز در رئوس ابتدا و انتها) همدیگر را قطع نکنند.

گراف‌های شکل ۴-۵۰، نمونه‌هایی از گراف‌های مسطح می‌باشند:



شکل ۴-۵۰.

مثال ۴-۵۰: به وضوح گراف‌های K_1، K_2 و K_3 مسطح می‌باشند. می‌توان نشان داد که گراف K_4 نیز مسطح است؛ برای این‌منظور کافی‌است، نشان‌دهیم گراف K_4 با گرافِ شکل ۴-۵۱ یکریخت است(برعهدهٔ دانشجو).

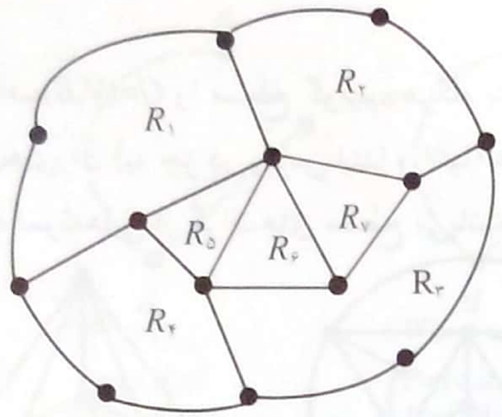


شکل ۴-۵۱.

ناحیه (وجه): در ترسیم گراف مسطح، قسمتی از شکل که توسط تعدادی یال محصور شده است، ناحیه یا وجه می‌نامیم.

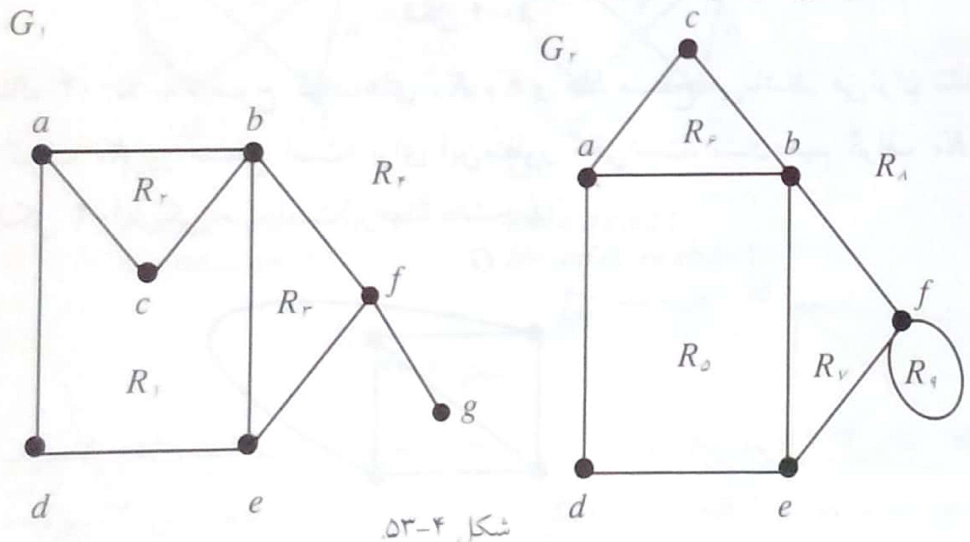
درجهٔ ناحیه: طول کوتاه‌ترین گشتِ بستهٔ دور تا دور مرز هر ناحیه را، درجهٔ آن ناحیه می‌نامیم. درجهٔ هر ناحیه را با $deg(R_i)$ نشان می دهند.

مثال ۴-۵۱: گراف زیر، دارای ۷ ناحیهٔ داخلی R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7 و یک ناحیه خارجی R_8 می‌باشد؛ بنابراین گراف فوق، ۸ ناحیه دارد.



شکل ۴-۵۲.

مثال ۴-۵۲: دو گراف G_1 و G_2 را درنظر بگیرید. درجهٔ هر ناحیه و مجموع درجه‌های نواحی هر گراف را بیابید.



شکل ۴-۵۳.

حل:

G_1: $deg(R_1)=5$

$deg(R_2)=7$

$deg(R_3)=deg(R_4)=3$

$$\sum_{i=1}^{4} deg(R_i) = 18$$

G_2: $deg(R_5)=4$

$deg(R_6)=deg(R_7)= 3$

$deg(R_8)= 7$

$deg(R_9)= 1$

$$\sum_{i=5}^{8} deg(R_i) = 18$$

Scanned by CamScanner

☑ **گزاره ۴-۴:**

فرض‌کنید $G=(V,E)$ گرافی همبند و مسطح با $|R|$ ناحیه باشد. آن‌گاه داریم:

$$\sum_{i=1}^{|R|} deg(R_i) = 2\,|E|$$

اثبات:

بنا به تعریف درجه، اگر یال معلق باشد، برای محاسبهٔ درجهٔ ناحیه، از روی آن ۲ بار عبور می‌کنیم. یال طوقه، ناحیه‌ای از درجهٔ ۱ و یال‌های موازی ناحیه‌هایی از درجهٔ ۲ به‌وجود می‌آورند؛ از طرفی هر یال دقیقاً روی مرز دو ناحیه قرار دارد، پس هر یال در مجموع درجه‌های نواحی، ۲ بار محاسبه می‌شود و بنابراین حکم ثابت می‌گردد.

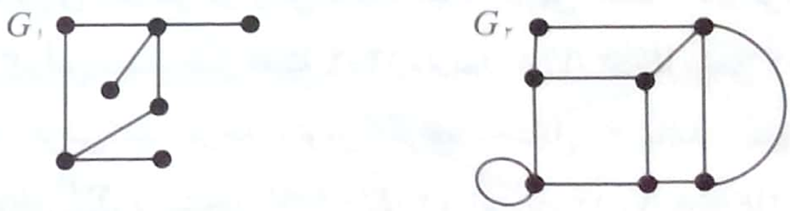
■

☑ **قضیه ۴-۱۳ (فرمول اویلر):** فرض‌کنید $G=(V,E)$ گرافی همبند و مسطح با $|V|$ رأس، $|E|$ یال و $|R|$ ناحیه باشد، در این‌صورت $|R|-|E|+|V|=2$

اثبات در [۷] قضیهٔ ۹-۷-۱ بیان شده است.

■

مثال ۴-۵۳: فرمول اویلر را برای گراف‌های G_1 و G_2 اعمال کنید.



شکل ۴-۵۴.

حل:

گراف G_1:

$|V|=7,\ |E|=7,\ |R|=2 \rightarrow |R|-|E|+|V|=2$

گراف G_2:

$|V|=7,\ |E|=11,\ |R|=6 \rightarrow |R|-|E|+|V|=2$

▶

☑ **قضیه ۴-۱۴:** فرض‌کنید $G=(V,E)$ گرافی ساده، همبند و مسطح با حداقل ۳ رأس باشد، در این‌صورت $|E| \leq ۳|V|-۶$ و $۳|R| \leq ۲|E|$.

اثبات: $\frac{3}{2}|R| \leq |E| \leq 3|V|-6$

بنابه تعریف درجهٔ ناحیه و اینکه گراف ساده است، درجه هر ناحیهٔ آن، حداقل ۳ می باشد. بنابراین:

$$۲|E| = \sum_{i=1}^{|R|} deg(R_i) \geq ۳|R|$$

با توجه به فرمول اویلر و رابطهٔ فوق داریم:

$$|R|-|E|+|V|=۲ \rightarrow ۲ = |R|-|E|+|V| = ۲ \leq (\tfrac{۲}{۳})|E|-|E|+|V| \rightarrow |E| \leq ۳|V|-۶$$

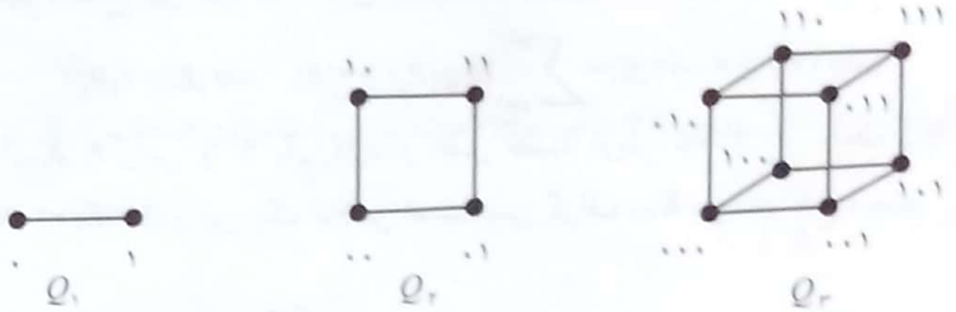
■

✎ **نتیجه:**

فرض‌کنید $G=(V,E)$ گرافی ساده، همبند با حداقل ۳ رأس و $|E| > ۳|V|-۶$ باشد، در این‌صورت گرافِ G نامسطح است.

☑ **گزاره ۴-۵:** فرض‌کنید $G=(V,E)$ گرافی ساده، همبند و مسطح باشد، در این‌صورت درجهٔ رئوس گراف از ۵ تجاوز نخواهدکرد.

گراف n- مکعب (Q_n) : گرافی است که رئوس آن مشخص‌کننده 2^n رشته بیتی به طول n است. دو رأس در این گراف فقط در صورتی مجاور هستند که در یک بیت اختلاف داشته باشند.



شکل ۴-۵۵

گراف‌های Q_1، Q_2، Q_3 در شکل ۴-۵۵ نشان داده شده است.

برای رسم Q_n می‌توان ۲ بار گراف Q_{n-1} را رسم کرد و دو رأس هم‌شماره را به‌هم متصل نمود. اگر برچسب رئوس L باشد، یک قسمت را تبدیل به $0L$ و قسمت دیگر را تبدیل به $1L$ نموده و اتصال رئوس طبق قاعده انجام می‌پذیرد.

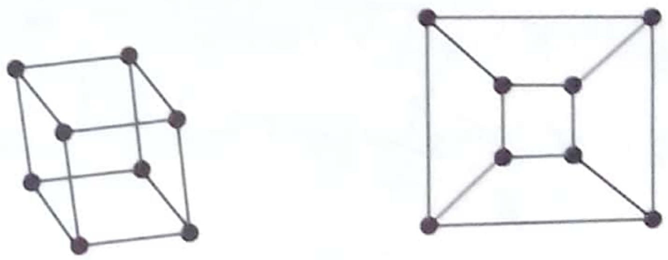
مثال ۴-۵۴: نشان دهید:

الف) گراف Q_3 مسطح است.

ب) گراف‌های K_5، $K_{3,3}$ مسطح نمی‌باشند.

حل:

الف) همان‌طور که در شکل زیر مشاهده می‌شود، گراف Q_3 را می‌توان طوری رسم‌نمود که یال‌ها، همدیگر را به‌جز در رئوس قطع نکنند.



شکل ۴-۵۶

ب) گراف K_5، گرافی ساده و همبند با ۱۰ یال و ۵ رأس است، بنابر نتیجهٔ ذیل قضیهٔ ۴-۱۴، داریم: $10=|E|>3|V|-6=15-6=9$، پس گراف K_5 مسطح نمی‌باشد.

برای نشان‌دادن نامسطح بودن گراف $K_{3,3}$ از برهان خلف استفاده می‌کنیم:

فرض‌کنید گراف $K_{3,3}$ مسطح باشد، طبق تعریف گراف دوبخشی کامل، درجهٔ هر ناحیه در ترسیم مسطح این گراف، حداقل ۴ است. بنابراین:

$$deg(R_i) \geq 4 \rightarrow 2|E| = \sum_{i=1}^{|R|} deg(R_i) \geq 4|R| \quad \Rightarrow |E| \geq 2|R|$$

گراف $K_{3,3}$ ۶ رأس و ۹ یال دارد و طبق قضیهٔ اویلر $|R|=5$. از رابطهٔ بالا داریم: $|E|=9$، $|R|=10 > 2|E|$ و این یک تناقض است. پس گراف $K_{3,3}$ نیز نامسطح است.

مثال: اگر G یک گراف ساده و همبند و مسطح با حداقل سه رأس باشد بطوری که هر کدام از دورها حداقل به طول 4 باشد ثابت کنید $|E| \leq 2|V| - 4$

حل: با توجه به صورت مسئله درجه هر ناحیه حداقل 4 است پس

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{|R|} deg(R_i)}_{2|E|} \geq 4|R|$$

$$\Rightarrow |R| \leq \frac{1}{2}|E|$$

مسطح G $\Rightarrow |R| + |V| = |E| + 2$

$$\Rightarrow \underbrace{|R| + |V|}_{|E|+2} \leq \frac{1}{2}|E| + |V|$$

$$\Rightarrow |E| + 2 \leq \frac{1}{2}|E| + |V|$$

$$\Rightarrow |E| \leq 2|V| - 4$$

Scanned by CamScanner

چند نمونه مسأله حل شده

۱. فرض‌کنید $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ موجود باشد، تعداد گراف‌های با l یال و n رأس را بیابید.

حل:

تعداد کل یال‌های قابل رسم با n رأس برابر است با: $\binom{n}{2}$ بنابراین انتخاب l یال از $\binom{n}{2}$ یال برابر است با $\binom{\binom{n}{2}}{l}$.

۲. فرض‌کنید $V=\{v_1,\dots,v_7\}$:

الف) با این رئوس چند گرافِ ساده می‌توان ساخت؟

ب) با این رئوس چند گرافِ ساده با ۳ یال می‌توان رسم نمود؟

ج) چند گرافِ ساده با ۴ یال که شامل یال v_1v_2 باشد، می‌توان رسم نمود؟

د) چند گرافِ ساده با ۴ یال که شامل یال v_2v_3 نباشد، می‌توان ساخت؟

ه) چند گرافِ ساده با ۴ یال می‌توان رسم نمود که شامل یال v_1v_2 باشد، ولی شامل v_2v_3 نباشد؟

و) چند گراف با ۴ یال می‌توان رسم نمود که شامل یال v_1v_2 باشد، ولی شامل رأس v_3 نباشد؟

حل:

الف) $2^{\binom{7}{2}}=2^{21}$

ب) $\binom{\binom{7}{2}}{3}=\binom{21}{3}$

ج) از ۴ یال مذکور، یال v_1v_2 موجود است. پس باید به دنبال انتخاب ۳ یال دیگر بود. از مجموعهٔ کل یال‌های باقیمانده $\binom{7}{2}-1=20$، پس $\binom{20}{3}$.

د) تعداد کل یال‌های موجود $\binom{7}{2}=21$است؛ بنابراین چون قرار است یال v_2v_3 نباشد، ۲۰ یال داریم و باید ۴ یال از ۲۰ یال موجود انتخاب کنیم $\binom{20}{4}$.

ه) کل یال‌های قابل انتخاب برابر ۲۱ است؛ چون قرار است یال v_1v_2باشد، بنابراین باید ۳ یال دیگر از ۲۰ یال انتخاب شود. از طرفی یال v_2v_3 نباید در یال‌های انتخابی

قرارگیرد؛ در نتیجه ۳ یال دیگر باید از بین ۱۹=۱-۲۰ یال دیگر انتخاب شود، در نتیجه: $\binom{19}{3}$

و چون رأس v_3 در گراف انتخابی نیست، بنابراین تعداد رئوس گراف برابر ۶=۱-۷می‌باشد. بنابراین تعداد کل یال‌های انتخابی با ۶ رأس برابر $\binom{6}{2}$=۱۵ است.

چون قرار است یال v_1v_2 باشد، بنابراین۳ یال دیگر باید از بین ۱۴=۱-۱۵ یال انتخاب شوند، یعنی $\binom{14}{3}$.

▶

۳. آیا امکان دارد در یک مهمانی که ۷ نفر حضور دارند، هر شخص با ۳ نفر دوست باشد؟

حل:

خیر. این به این معنی است که گرافی با ۷ رأس تشکیل شود و هر رأس دارای درجهٔ ۳ باشد. بنابراین درجهٔ تمامی رئوس فرد است و ۷ رأس از درجهٔ فرد داریم. بنابه نتیجهٔ ذیل قضیه۴-۱، این ساختار گراف نمی‌باشد.

▶

۴. اگر گرافی شامل یک رأس درجه ۵، ۲ رأس درجه ۳ و ۶ رأس درجه ۲ و n رأس درجه ۱ باشد و $|V|=|E|-1$ باشد، مقدار n را بیابید.

حل:

بنابر فرض مسأله: $|V|=1+2+6+n=9+n$، همچنین:

$$\sum_{i=1}^{|V|} deg(u_i)=2|E| \Rightarrow 1\times5+2\times3+6\times2+n\times1=2|E| \Rightarrow 23+n=2|E|$$

$$|V|=|E|-1 \Rightarrow |E|=|V|+1$$

و از دو رابطهٔ بالا داریم: $n=3$

▶

۵. اگر K_n از K_{n-2}، ۱۳ یال بیشتر داشته باشد، n را بیابید.

حل:

$$K_n: \qquad |E_1|=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$K_{n-2}: \quad |E_2| = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

$$|E_1| = |E_2| + 13 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 13 \Rightarrow n=8$$

▶

۶. نشان‌دهید در گراف r-منتظم رابطهٔ زیر برقرار است.

$$|E| = \frac{r|V|}{2}$$

حل:

$$2|E| = \sum_{i=1}^{|V|} deg(u_i) = \sum_{i=1}^{|V|} r = r|V| \Rightarrow |E| = \frac{r|V|}{2}$$

▶

۷. **دنبالهٔ گرافیکی**: دنبالهٔ $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}, d_n$ گرافیکی نامیده می‌شود، اگر آن دنباله درجه‌های یک **گرافِ ساده** باشد. با درنظر گرفتن شرایطی می‌توان با استفاده از دنبالهٔ گرافیکی، گرافِ سادهٔ مورد نظر را ترسیم نمود. اگر $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}, d_n$ دنباله گرافیکیِ گراف G با n رأس باشد؛ آن‌گاه:

۱) رأس u_n که دارای بزرگ‌ترین درجه در دنباله $(deg(u_n)=d_n)$ است را، درنظر بگیرید.

۲) رأس u_n را حذف نموده، سپس یک واحد از d_n تا رأس بعدی کم می‌شود.

۳) دنبالهٔ جدید به صورت نزولی مرتب و سپس مراحل ۱و۲ را برای دنبالهٔ گرافیکی جدید تکرار می‌شود، تا دنبالهٔ ساده‌ای حاصل شود که به‌راحتی قابل رسم باشد.

۴) آخرین دنبالهٔ قابل رسم را، ترسیم نموده، سپس با یک حرکت پسرو، مرحله به مرحله به عقب برگشته و رئوس حذف شده در هر مرحله به گراف اضافه نموده؛ با اضافه نمودن هر رأس، تعداد یال‌هایی متناسب با درجهٔ آن رأس نیز به گراف اضافه می‌شود. گراف مرحلهٔ اول، همان گرافِ مورد نظر است.

آیا دنباله گرافیکی‌های زیر نمایانگر یک گرافِ ساده است؟

الف) ۴,۳,۳,۳,۲,۱,۱,۱,۱,۱,۰,۰

ب) ۴,۳,۳,۳,۳,۲,۲,۲,۰

حل:

الف) خیر. بنا به نتیجه ذیل قضیه ۴-۱، تعداد رئوس با درجهٔ فرد، زوج نیست، بنابراین این دنبالهٔ گرافیکی قابل رسم نمی‌باشد.

ب) مراحل رسم دنباله به ترتیب زیر می‌باشد:

۴, ۳, ۳, ۳, ۳, ۲, ۲, ۲, ۰

مرحله اول:

رأس ۴ حذف می‌شود، و از درجهٔ ۴ رأس بعدی یک واحد کم می‌گردد:

~~۴~~, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۰

مرحله دوم:

در این مرحله اگر دنباله نیاز به مرتب شدن داشت، به صورت نزولی مرتب می‌گردد. سپس مرحله ۱ مجدداً برای دنبالهٔ جدید تکرار می‌شود. یعنی رأس ۲ حذف و از درجهٔ دو رأس بعدی هر کدام یک واحد کم می‌شود:

~~۲~~, ۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۲, ۰

مرحله سوم:
دنباله را مرتب نموده و مجدداً مرحله ۱ تکرار می‌شود:

۲, ۲, ۲, ۲, ۱, ۱, ۰

~~۲~~, ۱, ۱, ۲, ۱, ۱, ۰

مرحله چهارم:

دنباله مرتب و مجدداً مرحله ۱ تکرار می‌شود:

۲, ۱, ۱, ۱, ۱, ۰
~~۲~~, ۰, ۰, ۱, ۱, ۰

مرحله پنجم:

پس از مرتب نمودن مجدد دنباله به‌صورت نزولی، مشاهده می‌شود که گراف قابل ترسیم است.

۱, ۱, ۰, ۰, ۰

بنابراین از آخرین مرحله، گراف رسم می‌شود.

گراف مرحله پنجم:

در این مرحله ۵ رأس با درجه‌های ۱,۱,۰,۰,۰ رسم می‌شود:

شکل ۴-۵۷.

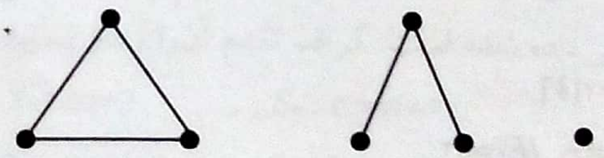
گراف مرحله چهارم:

در این مرحله، گراف باید دارای ۶ رأس با درجه‌های رئوس ۲،۱،۱،۱،۱،۰ باشد. برای این منظور کافی است به گراف قبلی، رأس حذف شده با درجهٔ ۲ اضافه گردد. از آنجا که درجهٔ این رأس ۲ است، ۲ یال جدید باید طوری به گراف اضافه شود که درجهٔ رئوس گراف جدید ۲،۱،۱،۱،۱،۰ باشد:

شکل ۴-۵۸.

گراف مرحلهٔ سوم:

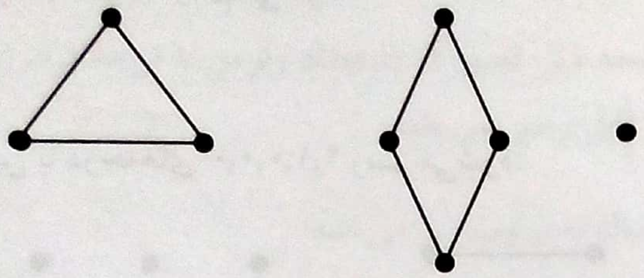
در این مرحله دنباله گرافیکی ۲،۲،۲،۲،۱،۱،۰ است که با اضافه شدن یک رأس با درجهٔ ۲ به گراف مرحله قبل ایجاد می‌شود:



شکل ۴-۵۹.

گراف مرحلهٔ دوم:

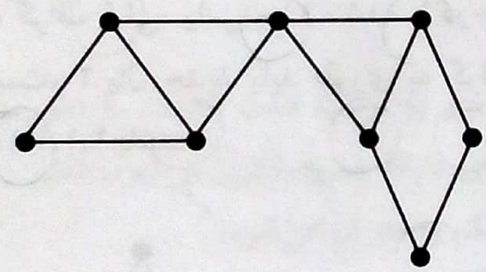
در این مرحله دنباله گرافیکی ۲،۲،۲،۲،۲،۲،۲،۰ است که با اضافه شدن یک رأس با درجهٔ ۲ به گراف مرحله قبل ایجاد می‌شود:



شکل ۴-۶۰.

گراف مرحلهٔ اول:

در این مرحله دنباله گرافیکی ۴،۳،۳،۳،۳،۲،۲،۲،۰ است که با اضافه شدن یک رأس با درجهٔ ۴ به گراف مرحله قبل ایجاد می‌شود:



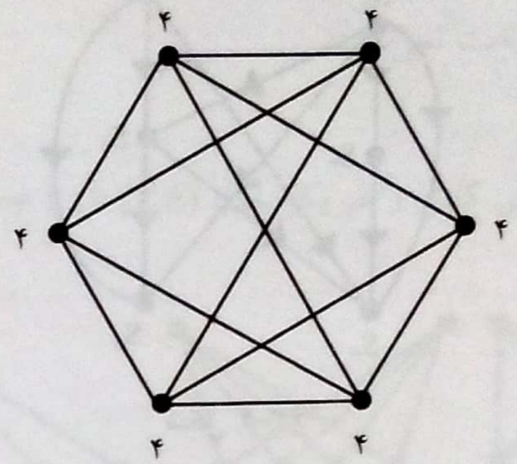
شکل ۴-۶۱.

۸. اگر گراف G، ۴- منتظم و $|E|=3|V|-6$، آن‌گاه $|V|$ و $|E|$ را بیابید و آن را رسم نمایید.

حل:

بنابه تمرین ۶ و فرض مسأله داریم:

$$|E|=\frac{r|V|}{2}=\frac{4|V|}{2}=2|V|$$
$$|E|=3|V|-6 \Rightarrow |V|=6,\ |E|=12$$



شکل ۴-۶۲.

۹. نشان‌دهید با n رأس حداکثر چندگرافِ جهت‌دار می‌توان رسم نمود؟

حل:

تعداد یال‌های قابل رسم در گراف جهت‌دار برابر است با اندازهٔ فضای $V\times V$ یعنی $|V\times V|=n^2$، بنابراین تعداد گراف‌های قابل رسم 2^{n^2} است.

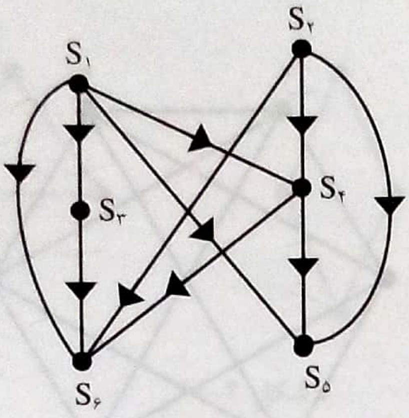
۱۰. برنامه‌های کامپیوتری به شرطی با سرعت بالا اجراء شوند که ترتیب عبارت‌های مرتبط باهم، رعایت شود. این عبارات را می‌توان با یک گراف جهت‌دار نشان داد، به‌طوری‌که متناظر با هر عبارت، یک رأس در گراف در نظرگرفته و یالی از رأس اول به رأس دوم موجود است هرگاه عبارت دوم قبل از عبارت اول نباشد. این گراف، **گراف تقدم** یا **برتری** نامیده می‌شود.

برنامهٔ کامپیوتری زیر داده شده است. گراف تقدم آن‌را رسم نمایید.

$S_1 : a:=0 \quad , \quad S_2 : b:=1 \quad , \quad S_3 : c:=a+1$

$S_4 : d:=b+a \quad , \quad S_5 : e:=d+1 \quad , \quad S_6 : f:=c+d$

حل:



شکل ۴-۶۳.

۱۱. ماتریس مجاورت گراف‌های G و G_1 داده شده است، آیا دو گراف یکریخت هستند یا خیر؟

الف)

$$A_{G_1}=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_G=\begin{array}{c} \\ e \\ f \\ g \\ h \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e & f & g & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

ب)

$$A_G=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_{G_1}=\begin{array}{c} \\ e \\ f \\ g \\ h \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e & f & g & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \end{array}$$

حل:

الف) هر دو گراف دارای ۴ رأس، ۵ یال و دنباله درجه‌های ۲،۳،۳و۲ هستند. تابع $f{:}G\to G_1$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(e)=d \qquad f(f)=c \qquad f(g)=b \qquad f(h)=a$$

بنابراین، دوگراف یکریخت می‌باشند.

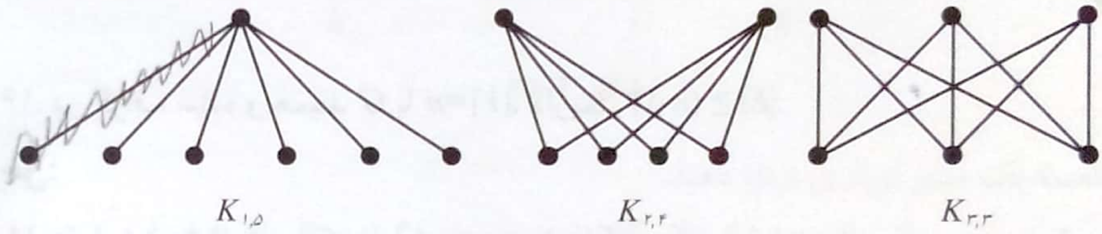
ب) مطابق ماتریس مجاورت، در دوگراف، هر ۴ رأس دارای ۲ طوقه می‌باشند، هم‌چنین ستون اول، دوم و چهارم هر دو ماتریس یکسان است ولی ستون سوم آن‌ها

یکی نیست، پس تابعی یک به یک و پوشا با خواص مورد نظر نمی‌توان تعریف نمود، بنابراین دو گراف یکریخت نمی‌باشند.

▶

۱۲. گراف‌های دوبخشی کامل و غیریکریخت $G=(V,E)$ با $|V|=۶$ را بیابید.

حل:



شکل ۴-۶۴.

▶

۱۳. گراف G چهل یال و $\overline{G}$ (مکمل آن)، هشتاد یال دارد، مرتبهٔ G را بیابید.

حل:

طبق تعریف گراف مکمل داریم: $\overline{G} \cup G=K_n$ ، پس $\overline{E} \cup E=\frac{n(n-۱)}{۲}$ و طبق فرض مسأله، $\frac{n(n-۱)}{۲}= ۱۲۰ =۴۰+۸۰$. بنابراین $|V|=n=۱۶$.

▶

۱۴. فرض‌کنید که G یک دور با n رأس باشد($G=C_n$)، نشان‌دهید که G خودمکمل است اگر و تنها اگر $n=۵$.

حل:

فرض‌کنید $G=C_n$ خود مکمل باشد، پس درجهٔ هررأس G و هررأس $\overline{G}$ برابر ۲ می‌باشد، هم‌چنین $\overline{G} \cup G=K_n$، پس درجهٔ هر رأس در K_n برابراست با ۴=۲+۲. بنابراین:

$$n-۱=۴ \Rightarrow n=۵$$

حال فرض‌کنید G یک دور با $n=۵$ رأس باشد($G=C_n$). با بررسی حالت‌های مختلف G (مطابق شکل‌های مثال۴-۴۵)، خود مکمل بودن G واضح است.

▶

۱۵. نشان‌دهید در گرافِ خود مکمل G با n رأس، داریم: $n/۴$ یا $(n-۱)/۴$.

حل:

طبق تعریف مکمل گراف، $|E|+|\overline{E}|=\frac{n(n-۱)}{۲}$. بنا بر یکریختی دو گراف G و $\overline{G}$ داریم: $|E|=|\overline{E}|$. بنابراین $|E|=|\overline{E}|=\frac{n(n-۱)}{۴}$. پس $n/۴$ یا $(n-۱)/۴$.

▶

۱۶. در گراف ساده و همبند G با $|V|=n$، داریم: $|E| \geq (n-۱)$.

حل:

با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. برای $n=۲$ و $|E|=۱$ حکم برقرار است.

فرض‌می‌کنیم برای $۲<l<n$، حکم برقرارباشد. نشان‌می‌دهیم، حکم برای $l=n$ درست است.

یک یال از گراف G حذف نموده، دو زیرگراف $G_۱$ و $G_۲$ به ترتیب با $k_۱$ و $k_۲$ رأس به‌دست می‌آید که در آن: $l=k_۱+k_۲=n$.

بنا به فرض استقرا $G_۱$ و $G_۲$ به ترتیب دارای حداکثر $(k_۱-۱)$ و $(k_۲-۱)$ یال می‌باشند، پس تعداد یال‌گرافِ ناهمبند حاصل‌شده حداکثر برابر $(k_۱-۱)+(k_۲-۱)=n-۲$ است؛ حال اگر یالِ حذف شده را به گراف اضافه نماییم گراف حاصل همبند و دارای حداکثر $(n-۱)$ یال می‌باشد؛ بنابراین حکم درست است.

▶

۱۷. فرض‌کنید $G=(V,E)$ گرافی ساده، همبند و مسطح با حداقل ۳ رأس، به‌طوری‌که حداقل گشتِ بسته در گراف، به‌طول ۴ باشد. در این‌صورت $|E|\leq ۲|V|-۴$.

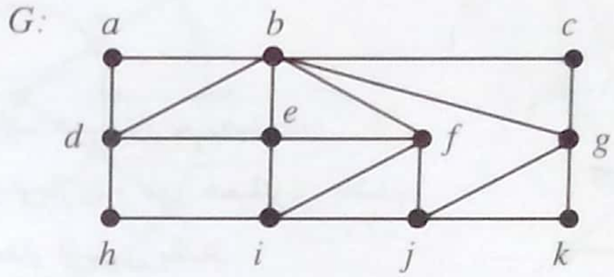
حل:

درجهٔ هر ناحیه حداقل ۴ می‌باشد، زیرا حداقل گشتِ بسته در گراف، به‌طول ۴ است. پس: $۲|E|=\sum_{i=۱}^{|R|} deg(R_i)\geq ۴|R|$ و بنابر قضیهٔ اویلر داریم:

$$۲|E|\geq ۴|R|=۴(|E|-|V|+۲) \Rightarrow |E|\leq ۲|V|-۴$$

▶

۱۸. در مورد گراف زیر:



شکل ۴-۶۵.

الف) یک مدار اویلری ارائه دهید.

ب) با حذف یال de از این گراف، گذر اویلری برای گرافِ باقیمانده را بیابید.

حل:

الف) درجهٔ تمام رئوس زوج است ،بنابراین مدار اویلری دارد. مدار اویلری فوق برابر است با:

$$a,b,c,g,b,f,j,g,k,j,i,f,e,i,h,d,e,b,d,a$$

ب)

$$d,b,a,d,h,i,e,f,i,j,f,b,c,g,k,j,g,b$$

۱۹. به ازای چه مقادیری از n، K_n مدار اویلری دارد؟

حل:

گرافی مدار اویلری دارد که درجهٔ تمامی رئوس آن عددی زوج باشد، یعنی:

$$n\text{-}۱=۲\,k \rightarrow n=۲\,k+۱ \quad \text{و} \quad n\geq ۳$$

بنابراین گراف کامل با مرتبهٔ فرد اویلری است.

۲۰. به ازای چه مقادیری از n، K_n گذر اویلری دارد، ولی مدار اویلری ندارد؟

حل:

برای $n=۲$ به‌وضوح گذر اویلری وجود دارد و مدار اویلری ندارد. از طرفی یک گراف زمانی گذر اویلری دارد، که دقیقاً ۲ رأس آن درجهٔ فرد باشد، ولی در K_n، درجهٔ رئوس

یا تماماً فرد یا تماماً زوج است. بنابراین در گراف‌های کامل K_n با $n \geq 3$، گذر اویلری وجود ندارد.

۲۱. مثالی از یک گراف همبند ارائه دهید که:

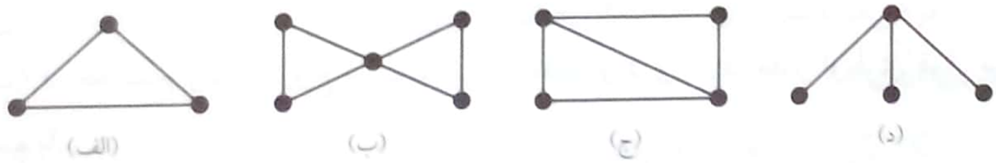
الف) دارای مدار اویلری و دور همیلتونی باشد.

ب) فقط دارای مدار اویلری باشد.

ج) فقط دارای دور همیلتونی باشد.

د) دارای مدار اویلری و دور همیلتونی نباشد.

حل:



شکل ۴-۶۶.

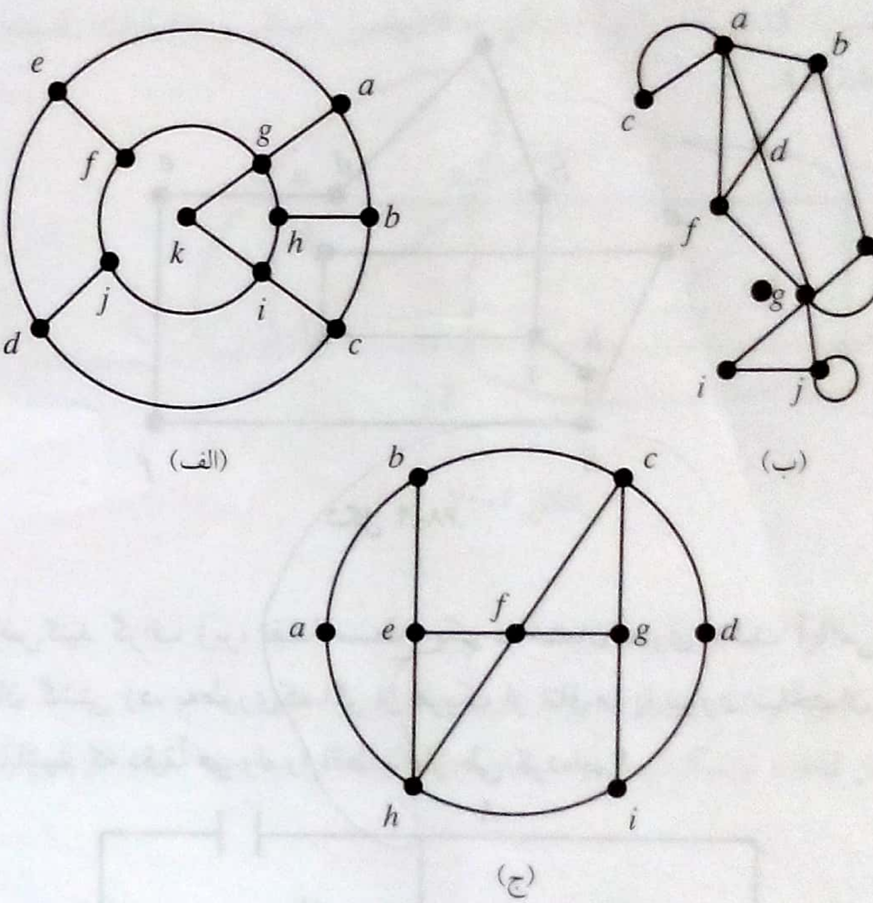
۲۲. در کدام‌یک از گراف‌های شکل ۴-۶۷، دور و مسیر همیلتونی وجود دارد؟

حل:

گراف (الف) دارای دور همیلتونی e,a,b,h,g,k,i,c,d,j,f,e است.

گراف (ب) دارای دور همیلتونی نیست، ولی دارای مسیر همیلتونی i,j,g,e,b,d,f,a,c است.

گراف (ج) دارای دور همیلتونی b,a,h,e,f,g,i,d,c,b است.

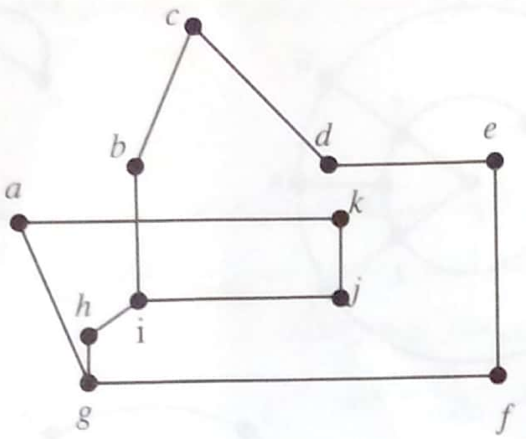


شکل ۴-۶۷.

۲۳. آیا گراف شکل ۴-۶۸ اویلری است؟

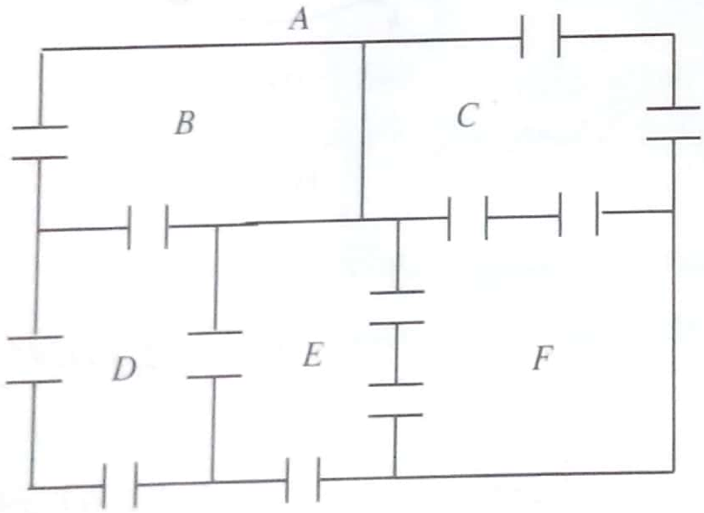
حل:

این گراف فاقد مدار اویلری است، زیرا درجهٔ تمام رئوس آن زوج نیست. اما این گراف، گذر اویلری *ijkagfedcbihg* را دارد.



شکل ۴-۶۸.

۲۴. فرض‌کنید گراف زیر، نقشهٔ مسطح یک ساختمان اداری باشد، آیا می‌توان در این ساختمان گشتی زد، به‌طوری‌که اگر از هریک از اتاق‌ها یا بیرون ساختمان شروع کنیم، مطمئن باشیم که دقیقاً هر راه را فقط یکبار طی کرده‌ایم؟



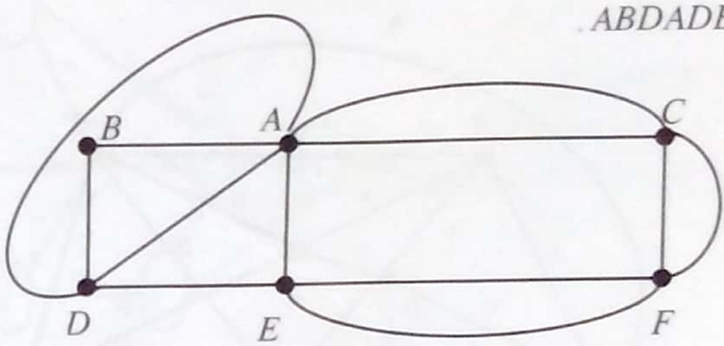
شکل ۴-۶۹.

حل:

گراف حاصل از این نقشه را رسم می‌کنیم، به‌طوری‌که در آن هر رأس متناظر یک اتاق (رأس متناظر A فضای بیرونی ساختمان است) و هر یال متناظر با درب بین اتاق‌ها می‌باشد(شکل ۴-۷۰).

یک گشت در ساختمان، به‌طوری‌که از هر درب فقط یکبار عبور کند، متناظر با یافتن مدار اویلری در گراف حاصل می‌باشد. با توجه به گراف، چون درجهٔ هر رأس

زوج است، چنین گشتی در ساختمان امکان‌پذیر است و عبارت است از: $ABDADEACFEFCA$.



شکل ۴-۷۰.

۲۵. گرافِ شکل ۴-۷۱ را درنظر بگیرید.

الف) نشان‌دهید این گراف دارای مسیر و دورهمیلتونی است.

ب) با استفاده از قاعدهٔ نزدیک‌ترین همسایه، دور همیلتونی نیمه‌بهینه را برای این گراف بیابید.

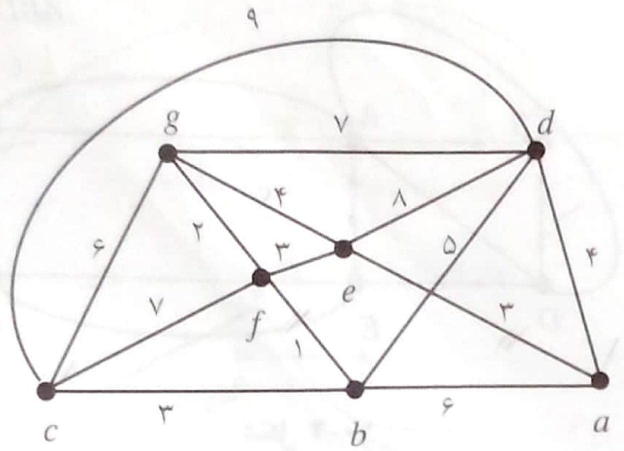
حل:

الف) تعداد رئوس گراف ۷ و دنبالهٔ درجه‌های رئوس گراف به ترتیب عبارت است از ۳،۴،۴،۴،۴،۴،۵. بنابر قضیه‌های ۴-۹، ۴-۱۰، ۴-۱۱ و۴ -۱۲ گراف هم دارای مسیر همیلتونی و هم دور همیلتونی است. $abcfgdea$ یک دور همیلتونی و $gdaefbc$ یک مسیر همیلتونیِ گراف است.

ب) در ابتدا $P=\{g\}$، حال در ادامه، مراحل دور همیلتونی به صورت زیر است:

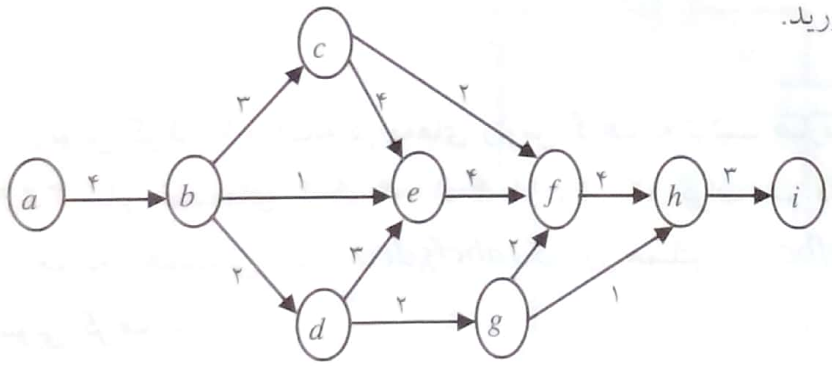
:(۱)	$P=\{g,f\}$	$H=\{gf\}$	۲ = هزینه مسیر
:(۲)	$P=\{g,f,b\}$	$H=\{gf,fb\}$	=۳ هزینه مسیر
:(۳)	$P=\{g,f,b,c\}$	$H=\{gf,fb,bc\}$	=۶ هزینه مسیر
:(۴)	$P=\{g,f,b,c,d\}$	$H=\{gf,fb,bc,cd\}$	=۱۵ هزینه مسیر
:(۵)	$P=\{g,f,b,c,d,a\}$	$H=\{gf,fb,bc,cd,da\}$	=۱۹ هزینه مسیر
:(۶)	$P=\{g,f,b,c,d,a,e\}$	$H=\{gf,fb,bc,cd,da,ae\}$	=۲۲ هزینه مسیر
:(۷)	$P=\{g,f,b,c,d,a,e,g\}$	$H=\{gf,fb,bc,cd,da,ae,eg\}$	=۲۶ هزینه مسیر

بنابراین طول کوتاه‌ترین دور نیمه‌بهینه همیلتونی $H=\{gf,fb,bc,cd,da,ae,eg\}$ ۲۶ است.



شکل ۴-۷۱.

۲۶. گراف زیر مراحل انجام و زمان لازم (برحسب ماه) برای اجرای یک پروژهٔ صنعتی را نشان می‌دهد. با استفاده از الگوریتم دیجکسترا، کوتاه‌ترین زمان اتمام پروژه را به‌دست آورید.



شکل ۴- ۷۲.

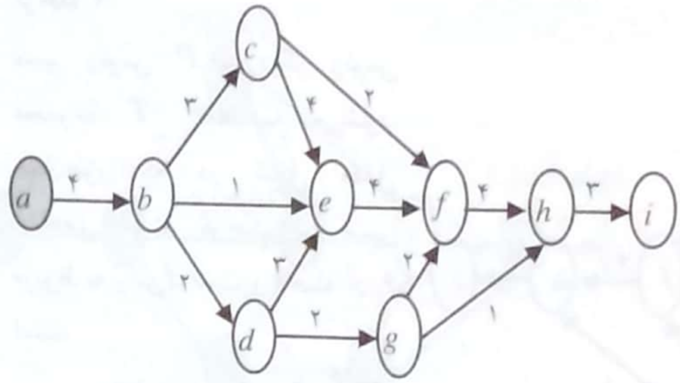
حل:

مرحله ۱:

در این مرحله رأس a انتخاب می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$P=\{a\}$

$T=\{b,c,d,e,f,g,h,i\}$

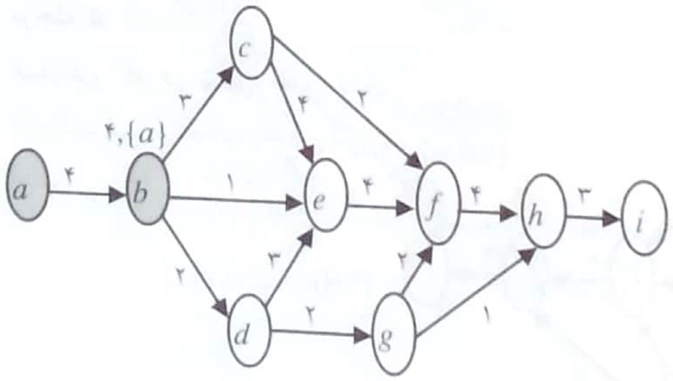


مرحله ۲:

با توجه به رئوس P تنها مسیری که از رأس a شروع شده و کوتاه‌ترین وزن را نسبت به رئوس مجموعهٔ T دارند، عبارتست از: $ab=۴$ پس:

$P=\{a,b\}$

$T=\{c,d,e,f,g,h,i\}$

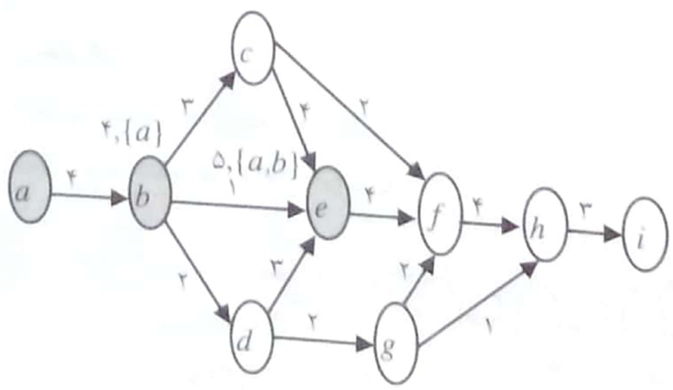


مرحله ۳:

با توجه به رئوس P مسیرهایی که از رأس a شروع شده و یا از b می‌گذرد و کوتاه‌ترین وزن را نسبت به رئوس مجموعهٔ T دارند، عبارتند از: $abc=۷$، $abd=۶$ و $abe=۵$ است. کوچک‌ترین مسیر مربوط به $abe=۵$ است. بنابراین رأس e انتخاب می‌شود.

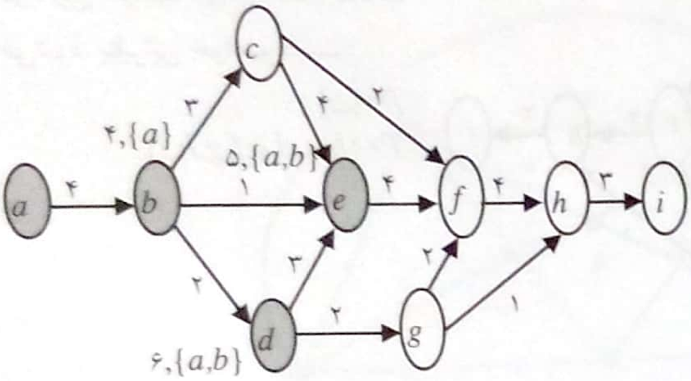
$P=\{a,b,e\}$

$T=\{c,d,f,g,h,i\}$



مرحله ۴:

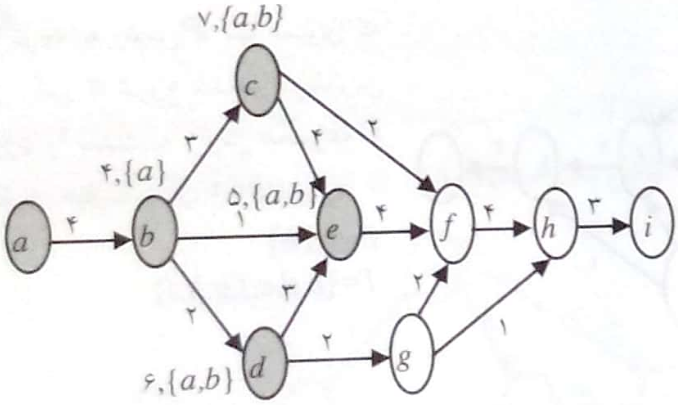
مسیر رئوس P با دیگر رئوس مجموعهٔ T محاسبه می‌شود. همان‌طور که در شکل مقابل مشخص است، کوچک‌ترین مسیر مربوط به رأس d است و فاصله آن ۶ است.



$P=\{a,b,e,d\}$
$T=\{c,f,g,h,i\}$

مرحله ۵:

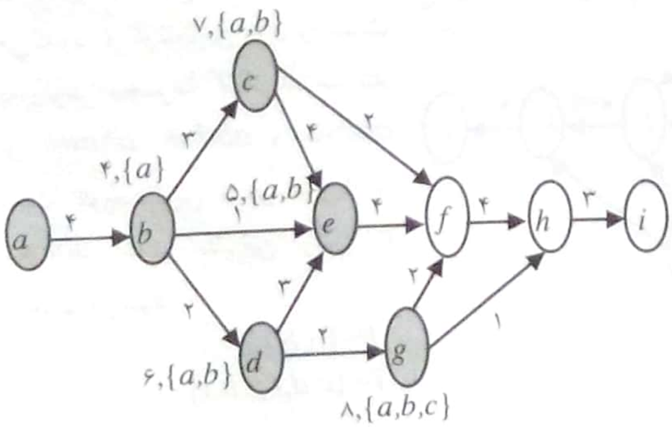
همان‌طور که در شکل مقابل نشان داده شده است، انتخاب بعدی رأس c است.



$P=\{a,b,e,d,c\}$
$T=\{f,g,h,i\}$

مرحله ۶:

انتخاب بعدی با توجه به مقادیر نشان داده شده در شکل، رأس g است.



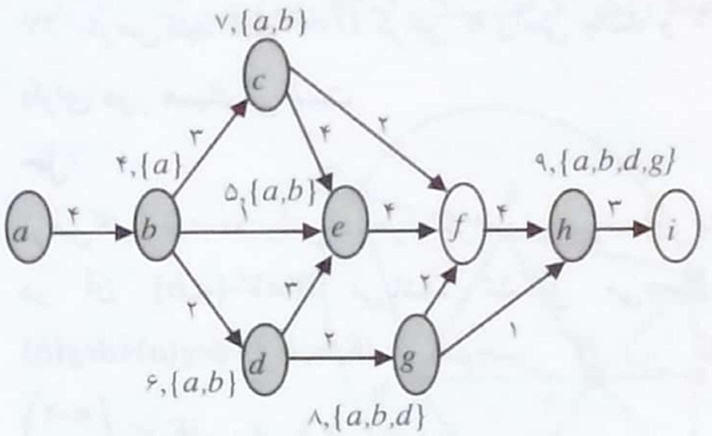
$P=\{a,b,e,d,c,g\}$
$T=\{f,h,i\}$

مرحله ۷:

این مرحله دو انتخاب داریم، رئوس h , f، رأس h را انتخاب می‌کنیم.

$P=\{a,b,e,d,c,g,h\}$

$T=\{f,i\}$

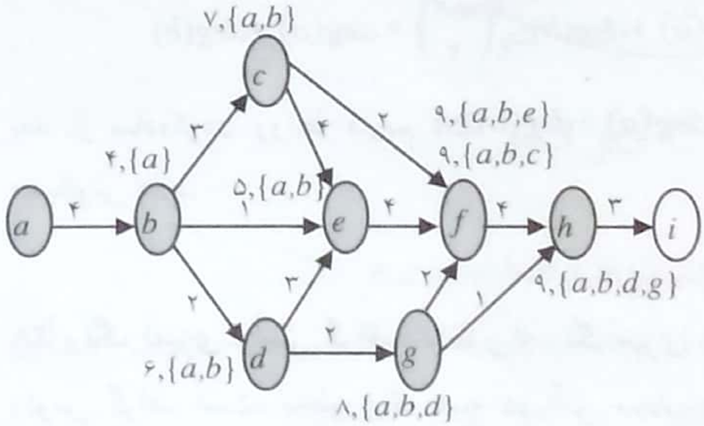


مرحله ۸:

انتخاب بعدی رأس f خواهد بود.

$P=\{a,b,e,d,c,g,h,f\}$

$T=\{i\}$

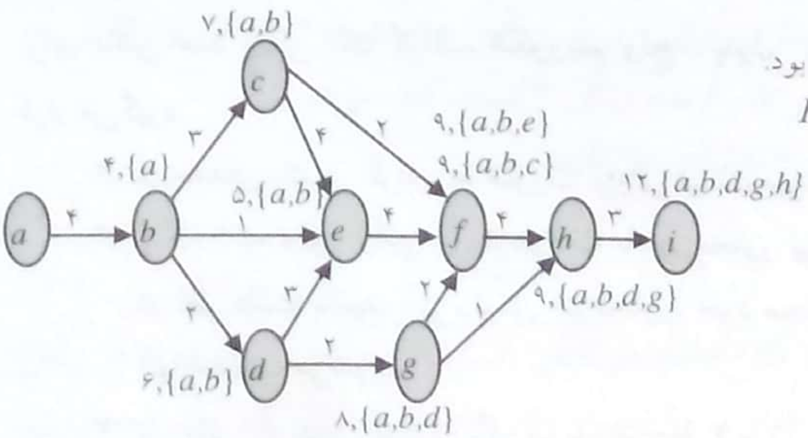


مرحله ۹:

آخرین انتخاب، رأس i خواهد بود.

$P=\{a,b,e,d,c,f,g,h,i\}$

$T=\{\}$



بنابراین کوتاه‌ترین زمان انجام پروژه با عبور از مسیر a,b,d,g,h,i ، طی ۱۲ ماه انجام خواهد شد.

◀

۲۷. فرض‌کنید $G=(V,E)$ گرافی n رأسی باشد و $|E| \geq \binom{n-1}{2}+2$، در این‌صورت G دارای دور همیلتونی است.

حل:

فرض‌کنید a,b دو رأس دلخواهِ گراف و غیرمجاور باشند. زیرگراف $H=(W,E_1)$ را که در آن $W=V-\{a,b\}$ می‌باشد، تشکیل می‌دهیم ؛ پس $|W|=|V|-2=n-2$ و $|E|=|E_1|+deg(a)+deg(b)$. هم‌چنین H زیر گراف K_{n-2} نیز هست، پس $|E_1| \leq \binom{n-2}{2}$ و بنابر فرض داریم:

$$\binom{n-1}{2}+2 \leq |E_1|+deg(a)+deg(b) \leq \binom{n-2}{2}+deg(a)+deg(b)$$

بعد از ساده‌کردن روابط داریم $deg(a)+deg(b) \geq n$ و بنابر قضیهٔ ۴-۱۲ گراف دور همیلتونی دارد.

▶

۲۸. **رنگ آمیزی رأسی گراف:** منظور از رنگ‌آمیزی رأسی گراف، نسبت دادن رنگ به رئوس گراف است، به‌طوری‌که هیچ دورأسِ مجاوری، همرنگ نباشند. حداقل تعداد رنگ لازم برای رنگ‌آمیزی گراف، **عدد رنگی رأسی گراف** نامند و با $\chi(G)$ نشان می‌دهند.

برای یافتن عدد رنگی یک گراف، **الگوریتم ولچ- پاول**[1] به شرح زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱. درجه‌های رئوس گراف به صورت نزولی مرتب می‌شود.

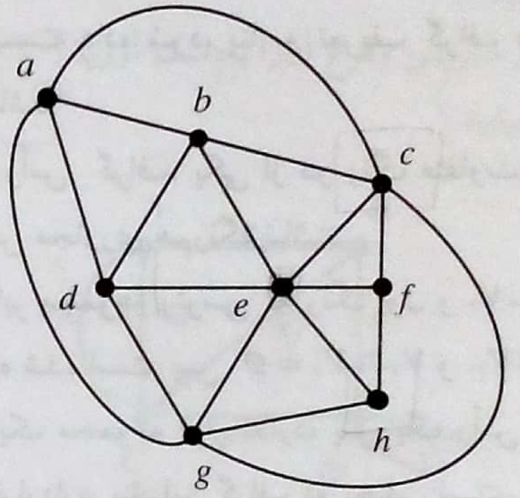
۲. رنگ ۱ به اولین رأس و رئوسی که با آن مجاور نیستند، نسبت داده می‌شود. در نظر داشته باشید، اگر رئوس غیرمجاور، خود مجاور یکدیگر باشند، یکی از آنها انتخاب می‌شود.

۳. تا زمانی که همه رئوس رنگ شوند، مرحلهٔ ۲ با رأس رنگ نشده بعدی تکرار می‌شود.

---

1 . Welch - Pavl

با استفاده از الگوریتم ولچ- پاول عدد رنگی گراف شکل ۴-۷۳ را بیابید.



شکل ۴-۷۳.

حل:

رئوس به ترتیب نزولی مرتب می‌شوند: e,c,g,a,b,d,f,h

- رأس e و رأسی که به آن وصل نیست، یعنی a انتخاب می‌شوند. به این دو رأس عدد رنگی ۱ نسبت داده می‌شود.
- رأس بعدی (از جهت بزرگی درجه) c است. به این رأس و رئوسی که به آن وصل نیستند، یعنی d و h عدد رنگی ۲ نسبت داده می‌شود.
- رأس بعدی انتخاب نشده در ترتیب نزولی، رأس g است. به این رأس و رئوسی که به آن وصل نیستند، یعنی b و f عدد رنگی ۳ نسبت داده می‌شود.

بنابراین عدد رنگیِ گراف $\chi(G)=$ ۳ می‌باشد.

۲۹. ثابت کنید: گرافِ سادهٔ $G=(V,E)$، دوبخشی است اگر و فقط اگر بتوان به هر رأس گراف، یکی از دو رنگ متفاوت را نسبت داد، به‌طوری‌که هیچ دو رأس مجاوری، هم‌رنگ نباشند.

اثبات:

فرض‌کنید گراف $G=(V,E)$، دوبخشی با مجموعه رئوس V_1 و V_2 باشد، به‌طوری‌که $V=V_1 \cup V_2$ و $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. اگر رنگ اول را به مجموعه رئوس $V1$ و رنگ دوم به مجموعه رئوس $V2$ نسبت داده شود، بنا به تعریف گراف دوبخشی، هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نمی‌باشد.

حال فرض‌کنید به هر رأس گراف، یکی از دو رنگ متفاوت، نسبت داده شده است، به‌طوری‌که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند.

قراردهید V_1، برابر مجموعهٔ رئوسی که رنگ اول و V_2 مجموعهٔ رئوسی که رنگ دوم به آن‌ها نسبت داده شده است. پس $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ و $V=V_1 \cup V_2$. از طرفی هیچ دو رأس مجاوری در یک مجموعه قرار ندارد، پس یک رأس هر یال گراف در V_1 و رأس دیگر آن در V_2 قراردارد. بنابراین گراف دو بخشی است.

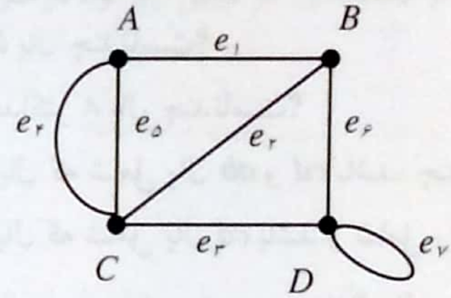
◀

تمرین‌های فصل

۱.گرافِ زیر را درنظر بگیرید.

الف) ماتریس مجاورت و ماتریس وقوع آن‌را به‌دست آورید؟

ب) مسیرها به‌طول ۳ را بیابید.



۲.شکل هریک از گراف‌های چندگانهٔ زیر را، رسم کنید که در آن
$V=\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5\}$

و

الف) $E=\{p_2p_4 , p_2p_3 , p_3p_5 , p_5p_4\}$

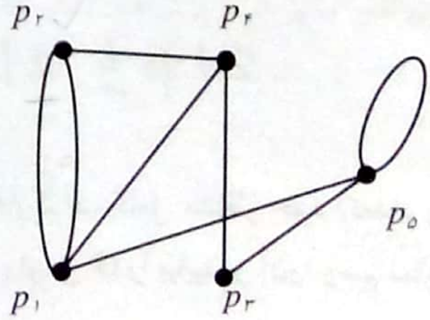
ب) $E=\{p_1p_1 , p_2p_3 , p_2p_4 , p_1p_4 , p_3p_2 , p_5p_4\}$

۳. فرض‌کنید در یک گراف $V=\{u,v,w\}$ و $deg(v)=4$ است.

الف) آیاچنین گرافی وجود دارد؟ اگر جواب منفی است، دلیل آن را بیان کنید.

ب) آیا چنین گراف چندگانه‌ای وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، یک مثال بزنید.

۴.ویژگی‌ها و مشخصات گراف زیر را توضیح دهید.



۵. در گرافی ۳- منتظم با n رأس و m یال، رابطهٔ $۴m+۳n=۹۰$ برقرار است. مرتبه و اندازهٔ گراف را بیابید.

۶. با ۹ رأس:

الف) چند گراف با این رئوس می‌توان ساخت؟

ب) تعداد گراف‌های با ۵ یال چندتاست؟

ج) تعداد گراف‌های با حداکثر ۸ یال چندتاست؟

د) تعداد گراف‌های با ۶ یال که شامل یال ab و cd باشد، چندتاست؟

ه) تعداد گراف‌های با ۴ یال که شامل یال cd باشد و شامل رأس a نباشد، چندتاست؟

۷. گراف $G=(V,E)$ را درنظر بگیرید، نشان دهید رابطه $\delta(G) \leq (۲m/n) \leq \Delta(G)$ برقرار است که در آن $m=|E|\ ,\ n=|V|$.

۸. برنامهٔ کامپیوتری زیر را در نظربگیرید:

الف) گرافِ تقدم آنرا رسم نمایید.

ب) با استفاده از قسمت(الف)، ماتریس مجاورت و ماتریس وقوع آنرا بیابید.

$S_۱ : x:=۰$, $S_۲ : x:=x+۱$, $S_۳ : y:=۲$, $S_۴ : z:=y$

$S_۵ : x:=x+۲$, $S_۶ : y:=x+z$, $S_۷ : z:=۴$

۹. فرض‌کنید گرافی G با n رأس و m یال که درجهٔ هررأس آن d یا$(d+۱)$ است. اگر p تعداد رئوس از درجهٔ d و q تعداد رئوس از درجهٔ $(d+۱)$ باشد. نشان‌دهید:

الف) $p=(d+۱)n-۲m$

ب) $۲/p$ یا $۲/q$ 2|p یا 2|q

۱۰. اگر گرافِ ۷-منتظم G ازگراف کامل متناظرِ خود (تعداد رئوسِ برابر)، ۲۴ یال کمتر داشته باشد، تعداد یال‌ها و رئوس G را بیابید و آنرا رسم نمایید.

۱۱. گرافی با n رأس رسم‌نمایید، به‌طوری‌که درجهٔ یک رأس آن $(n-1)$ و درجهٔ بقیه رئوس آن ۳ باشد.

۱۲. دو گراف ۳- منتظم با هشت رأس، رسم کنید.

۱۳. گراف مربوط به هریک از دنباله‌های گرافیکی زیر را، درصورت امکان رسم نمایید.

الف) ۵,۵,۴,۳,۲,۱

ب) ۳,۳,۲,۲,۲,۲

ج) ۶,۵,۴,۳,۲,۱

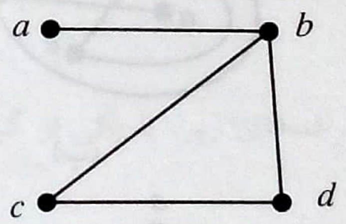
۱۴. نشان‌دهید تعداد یال‌های یک گرافِ دوبخشی با n رأس، حداکثر $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ است.

۱۵.گراف G در شکل داده‌شده است. تعیین‌کنید آیا $H(V',E')$ زیرگراف G است یا خیر، که در آن:

الف) $V'=\{a,b,c\}$ و $E'=\{ab\}$

ب) $V'=\{b\}$ و $E'=\{\ \}$

ج) $V'=\{a,b,d\}$ و $E'=\{ad,bc,bd\}$



۱۶. گرافِ سؤال قبل را درنظر بگیرید. زیرگراف $H(V',E')$ از گرافِ G تولیدشده توسط:

الف) $V'=\{a,b,c\}$

ب) $V'=\{a,c,d\}$

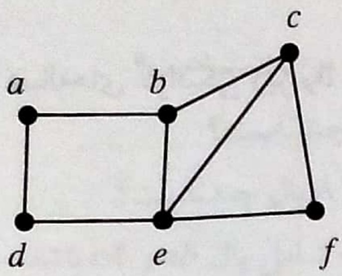
ج) $V'=\{a,d\}$

را به‌دست آورید.

۱۷. گراف G را درنظر بگیرید.

الف) زیرگراف‌های G-a، G-b و G-c را به‌دست آورید.

ب) زیرگراف‌های G-ab و G-be را به‌دست آورید.



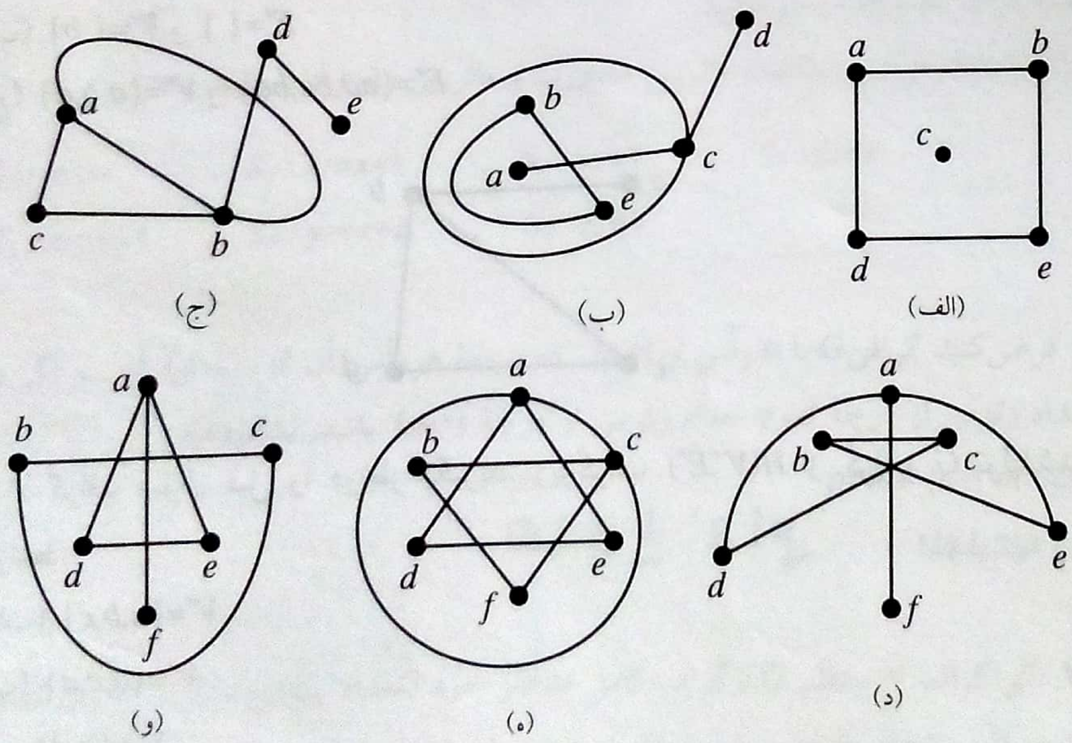
۱۸. گرافی با ۵ رأس مثال بزنید که:

الف) رأس برشی یا پل نداشته باشد.

ب)۲ رأس برشی داشته باشد.

ج) ۳ پل داشته باشد.

۱۹. تعین‌کنید کدام‌یک از گراف‌های زیر همبند وکدام‌یک ناهمبند است و تعداد مؤلفه‌های همبندی را بیابید.



۲۰. الف) گراف‌های ساده نایکریخت و همبند با شرط $|V|+|E|=8$ را بیابید.

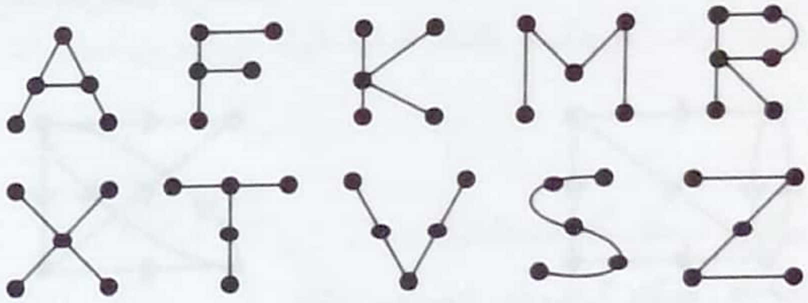
ب) گراف‌های ساده نایکریخت و همبند با شرط $|V|\times|E|=$۲۰ را بیابید.

۲۱. گرافِ G دارای n رأس، m یال و d مولفهٔ همبند است. نشان دهید: $m \geq n-d$.

۲۲. کدام‌یک از گراف‌های همبند، می‌تواند هم منتظم و هم دوبخشی باشد؟

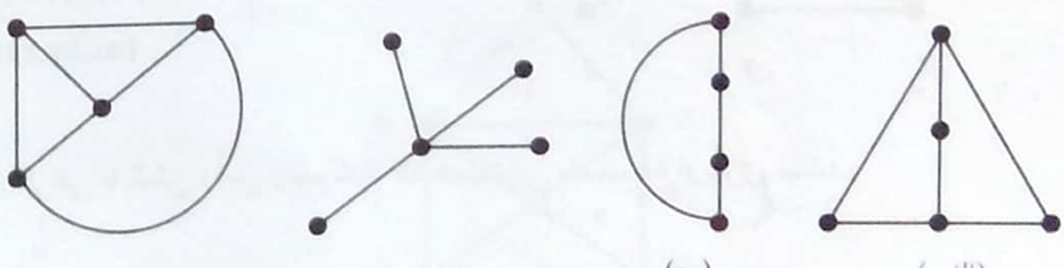
۲۳. نشان‌دهید اگر گرافی همبند نباشد، مکمل آن الزاماً همبند است.

۲۴. در شکل زیر، ده گراف که بصورت حروف رسم شده‌اند، نشان‌داده شده است.کدام یک از این ده گراف با M یکریخت است؟



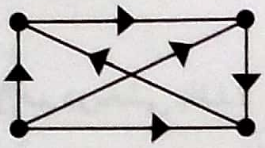
۲۵. آیا یک گراف متناهی می‌تواند با یکی از زیرگراف‌هایش(به جز خودش) یکریخت باشد.

۲۶. نشان‌دهید کدام‌یک از گراف‌های زیر با یکی از گراف‌های $K_{2,3}$، $K_{1,4}$، $K_{2,2}$ و K_4 یکریخت است(با ذکر دلیل).

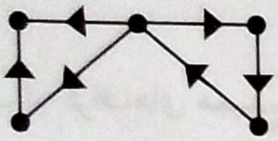


(الف) (ب) (ج) (د)

۲۷. تعیین‌کنید گراف‌های جهت‌دار زیر، کدام‌یک همبند قوی، همبند یک‌طرفه یا همبند ضعیف می‌باشند.



(الف)

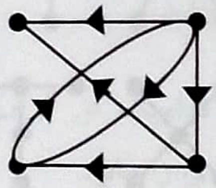


(ب)

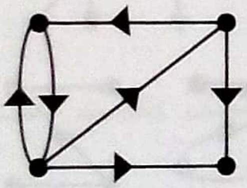
۲۸. دو گراف زیر را درنظر بگیرید.

الف) ماتریس مجاورت و ماتریس وقوع آن‌ها را بیابید.

ب) آیا دو گراف یکریخت می‌باشند؟

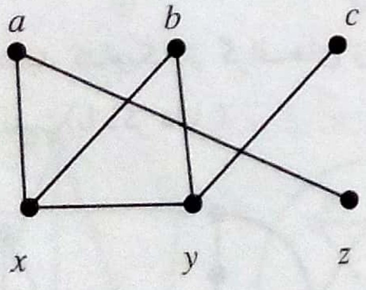


(۱)



(۲)

۲۹. فرض‌کنید شکل زیر نمایش گراف G باشد. تعیین‌کنید که آیا هریک از دنباله یال‌های زیر، تشکیل یک مسیر می‌دهند یا نه؟



الف) $\{ax,xb,cy,yx\}$

ب) $\{ax,xy,yz,za\}$

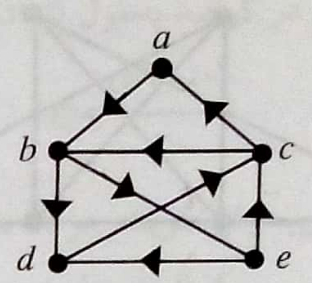
ج) $\{xb,by,yc\}$

د) $\{ax,by,xy\}$

۳۰. گرافی با شش رأس رسم‌کنید که همیلتونی باشد، اما اویلری نباشد.

۳۱. گرافی با شش رأس رسم‌کنید که همیلتونی نباشد، اما اویلری باشد.

۳۲. آیا گرافِ زیر گذر اویلری دارد؟ مدار اویلری چطور؟



۳۳. الف) اگر وزن هر یالِ یک گراف را K واحد$(K > ۰)$ افزایش دهیم، اندازه طول کوتاه‌ترین مسیر آن چه تغییری می‌کند؟

ب) اگر وزن هر یالِ یک گراف را K واحد$(K > ۰)$ کاهش دهیم، با این شرط که K از کوچک‌ترین وزن گراف کوچک‌تر باشد، اندازه طول کوتاه‌ترین مسیر آن چه تغییری می‌کند؟

۳۴. گراف $K_{m,n}$ را درنظر بگیرید. نشان‌دهید:

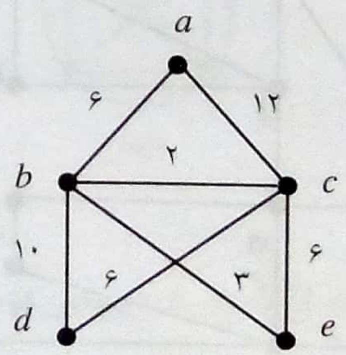
الف) اگر $m=n>۱$ ، آن‌گاه گراف دور همیلتونی دارد.

ب) اگر $|m-n|\leq۱$ ، آن‌گاه گراف مسیر همیلتونی دارد.

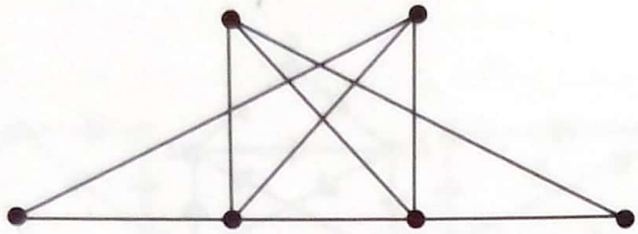
۳۵. گرافِ وزن‌دار G، در زیر داده‌شده است.

الف) کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأسa و d را به‌دست آورید.

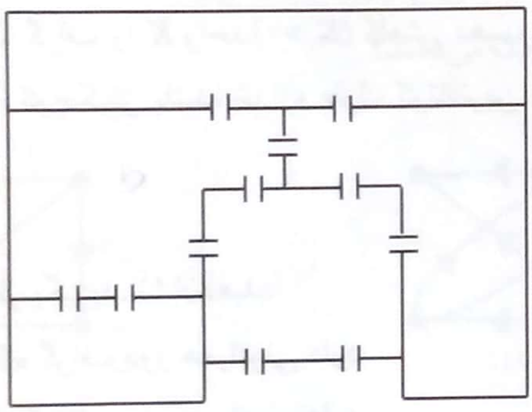
ب) طول کوتاه‌ترین دور همیلتونی را در صورت وجود، به‌دست آورید.



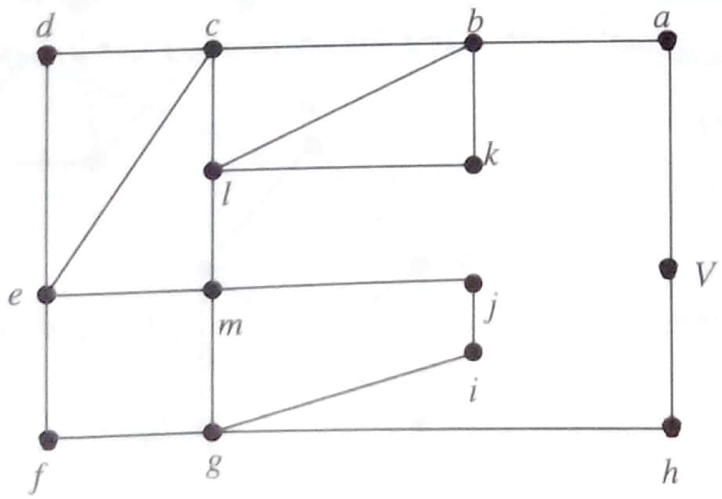
۳۶. گراف زیر را طوری رسم‌کنید که هیچ یک از یال‌هایش همدیگر را قطع نکنند.



۳۷. ساختمان موزه‌ای مطابق شکل زیر است. آیا می‌توان از بیرون موزه واردشد و گشتی در موزه زد به‌طوری‌که از هر در فقط یکبار عبور نمود ومجدداً به خارج ساختمان موزه بازگشت؟



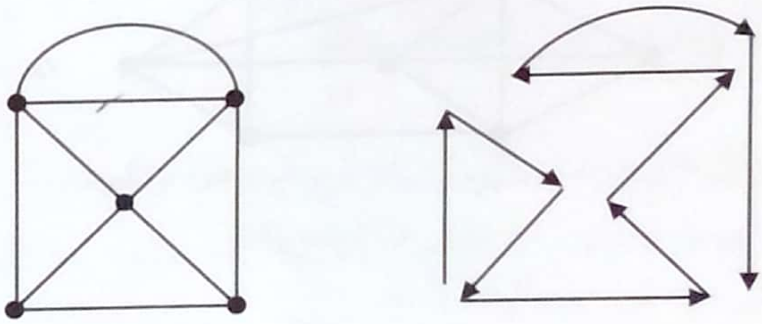
۳۸. فرض‌کنید گراف زیر نقشهٔ مسطح خیابان‌های یک منطقه از شهر باشد. آیا می‌توان از نقطهٔ V شروع کرد و از تمام خیابان‌ها فقط یکبار عبور نمود و مجدداً به V بازگشت؟



۳۹. فرض‌کنید $G=(V,E)$ گرافی ساده، همبند و مسطح با حداقل ۳ رأس باشد به‌طوری‌که حداقل گشتِ بسته در گراف، به‌طول ۵ باشد. در این‌صورت:

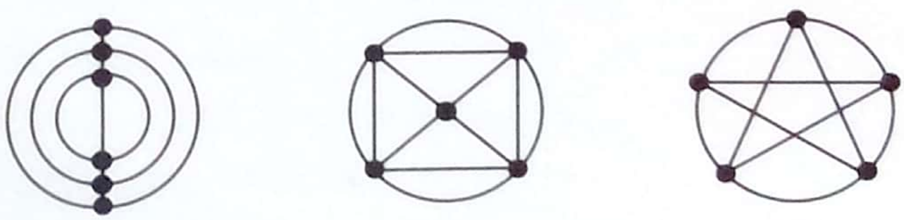
$$|E|\leq\frac{(۵|V|-۱۰)}{۳}$$

۴۰. گراف چندگانهٔ G را **قابل‌پیمایش** گویند، هرگاه بتوان گراف را بدون قطع منحنی و بدون تکرار هیچ یالی از آن رسم کرد؛ به عبارت دیگر، گشتی وجود داشته‌باشد که شامل تمام یال‌ها بوده و از هر یال فقط یکبار عبورکند. پس گراف قابل پیمایش، همبند است. این گشت باید یک گذر باشد که به‌این ترتیب به آن گذر قابل پیمایش می‌گویند. درشکل زیر، قسمت(ب) گذر قابل پیمایش گراف چندگانهٔ قسمت(الف) را نشان‌می‌دهد.



(الف) (ب)

تعیین‌کنید کدام‌یک از گراف‌های زیر، قابل پیمایش می‌باشند.



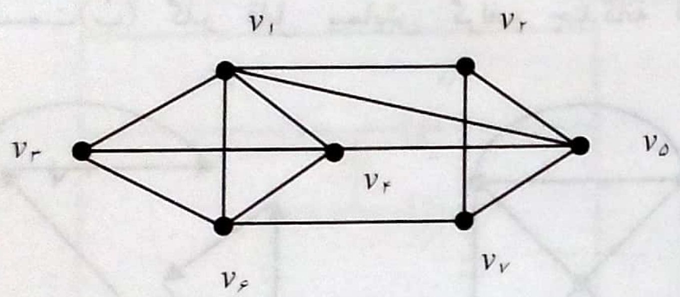
(ج) (ب) (الف)

۴۱. نشان‌دهید گراف چندگانهٔ G با بیش از دو رأس فرد، قابل پیمایش نیست.

۴۲. در یک جلسه ۳۷ نفر شرکت دارند که دور یک میز دایره‌ای شکل می‌نشینند. آن‌ها مایل هستند بیشتر باهم آشنا شوند. لذا هر نفر مجاور دو نفر که روزهای قبل با هم نشسته‌اند، نمی‌نشیند. برای چند روز باید به این طریق عمل‌شود ، قبل از اینکه دو نفر برای بار دوم مجاور هم نشسته باشند؟

۴۳. عدد رنگی گراف‌های C_n، W_n و K_n را به‌دست آورید.

۴۴. گراف زیر را با استفاده از الگوریتم ولچ-پاول رنگ‌آمیزی کنید.



بسمه تعالی

ضمیمه فصل ۴

(۱) با n راس حداکثر چند گراف ساده جهت‌دار و چند گراف ساده بدون جهت می‌توان رسم کرد.

حل: اگر $G=(V,E)$ یک گراف ساده بدون جهت دار باشد، تنوع گراف G به تنوع E بستگی دارد. از آنجا که گراف ساده است پس هر راس (۱) به $n-1$ راس دیگر قابل اتصال است (چون n راس دارد) تعداد یالها $\frac{n\times(n-1)}{2}$ می‌باشد، تقسیم بر ۲ می‌شود زیرا هر یال ۲ راس را به هم وصل می‌کند بنابراین ۲ مرتبه حساب می‌شود پس چنین گرافی $\frac{n\times(n-1)}{2}$ یال دارد و E زیرمجموعه‌ای از مجموعه یالهای گراف است پس تنوع E به تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $\frac{n\times(n-1)}{2}$ عضوی یعنی $2^{\frac{n\times(n-1)}{2}}$ می‌باشد.

البته برای یافتن تعداد یالهای یک گراف ساده با n راس به این صورت هم می‌شود استدلال کرد هر یال ۲ راس را به هم وصل می‌کند پس تعداد یالها برابر تعداد انتخابهای 2 از n یعنی $\binom{n}{2}$ می‌باشد.

و اگر $G=(V,E)$ یک گراف ساده جهت‌دار باشد بطور مشابه تعداد گرافهای ممکن برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه یالهاست، اما در این حالت تعداد یالها برابر $n\times(n-1)$ است زیرا وقتی مبدا و مقصد یال عوض می‌شود یک یال جدید دیگر ساخته می‌شود.

بنابراین در این حالت تعداد گرافها برابر $\left(2^{n(n-1)}\right)$ است.

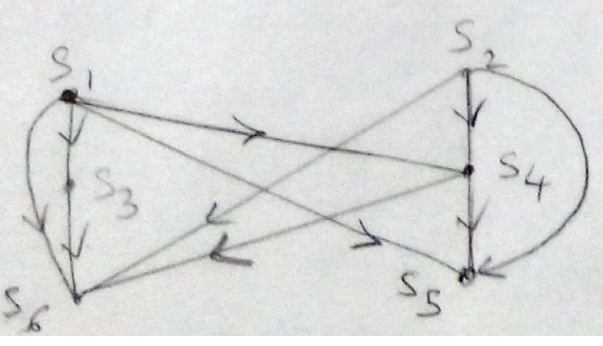
---

(۲) برنامه‌های کامپیوتری به شرطی با سرعت بالا اجرا می‌شوند که ترتیب عبارتهای مربوط رعایت شود. این عبارتها را می‌توان با یک گراف جهت‌دار نشان داد به طوری که نظیر هر عبارت یک راس از گراف در نظر گرفته می‌شود و اگر عبارت دوم قبل از عبارت اول اجرا نشده باشد، یال از راس اول به راس دوم موجود است. این گراف را گراف تقدم یا برتری می‌نامند. برنامه کامپیوتری زیر داده شده است، گراف تقدم آن را رسم کنید.

S_1: a:=0 / S_2: b:=1 / S_3: c:=a+1 / S_4: d:=b+a / S_5: e:=d+1

S_6: f:=c+d

حل:



③ اگر $G=(V,E)$ یک گراف (ساده) با n راس باشد، تعیین کنید:

الف: چند گراف می‌توان رسم کرد که دارای l یال باشد.

حل: با توجه به حل تمرین ① تعداد کل یالها $\binom{n}{2}$ در نتیجه تعداد گرافها برابر $\binom{\binom{n}{2}}{l}$ یعنی انتخاب l تا از $\binom{n}{2}$ تا می‌باشد.

ب: چند گراف ساده می‌توان رسم کرد که دارای ۳ یال باشند.

حل: برابر تعداد انتخابهای 3 یال از $\binom{n}{2}$ یال

$$\binom{\binom{n}{2}}{3}$$

پ: چند گراف ساده با ۴ یال که دارای یال ab (a و b دو راس یالند) باشد.

حل: برابر تعداد انتخابهای 3 یال از $\binom{n}{2}-1$ یال

$$\binom{\binom{n}{2}-1}{3}$$

ت: چند گراف ساده با ۴ یال که شامل یال cd (c و d دو راس یالند) نباشد.

حل: برابر تعداد انتخابهای 4 یال از $\binom{n}{2}-1$ یال

$$\binom{\binom{n}{2}-1}{4}$$

ث: چند گراف ساده با ۴ یال که یال ab را داشته باشد و شامل یال cd نباشد.

حل: از $\binom{n}{2}-2$ یال باید 3 یال انتخاب کنیم.

$$\binom{\binom{n}{2}-2}{3}$$

ج: چند گراف ساده با ۴ یال که یال ab را شامل باشد و راس c را نداشته باشد.

حل:

هیچ یال متصل به c

$$\binom{\binom{n}{2}-(n-1)-1}{3} = \binom{\binom{n}{2}-n}{3}$$

④ آیا امکان دارد در یک مهمانی که ۷ نفر حضور دارند، هر نفر دقیقاً با ۳ نفر دوست باشد.

حل: خیر، زیرا این مطلب به این معنی است که دقیقاً ۷ راس از درجه ۳ موجود باشد که تناقض است زیرا در هر گراف، تعداد راسهای فرد، زوج است.

۵) اگر گراف شامل یک رأس درجه ۴ و ۲ رأس درجه ۳ و ۶ رأس درجه ۲ و n رأس درجه ۱ باشد و $|V| = |E| - 1$، مقدار n را تعیین کنید.

حل: اگر $G = (V, E)$ رأس مورد نظر باشد

دو برابر تعداد یالها $= 1 \times 4 + 2 \times 3 + 6 \times 2 + n \times 1 =$ مجموع درجات رئوس

$$\Longrightarrow |E| = \frac{23+n}{2} \quad (1)$$

$|V| = |E| - 1$ طبق فرض $\Longrightarrow 1 + 2 + 6 + n = |E| - 1$

$$\Longrightarrow |E| = n + 10. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Longrightarrow \frac{23+n}{2} = n + 10 \Longrightarrow n = 3$$

۶) اگر K_n از K_{n-2}، 13 یال بیشتر داشته باشد، n را حساب کنید.

حل:

تعداد یالهای گراف کامل n رأسی $= \frac{n \times (n-1)}{2}$

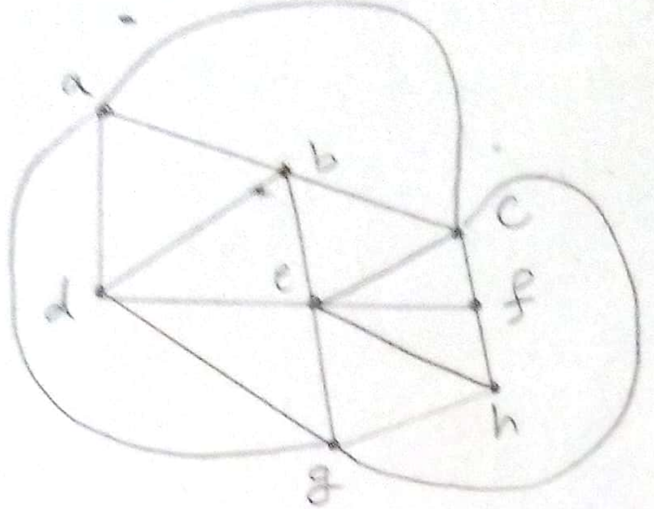
$$\Longrightarrow \frac{n \times (n-1)}{2} - \frac{(n-2)(n-3)}{2} = 13 \Longrightarrow n = 8$$

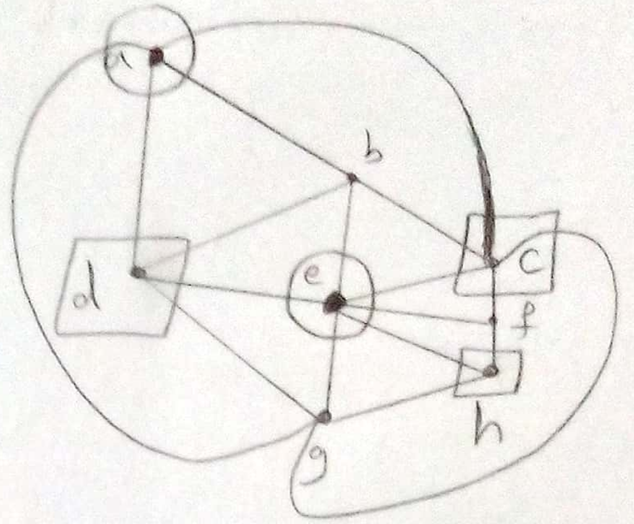
۷) منظور از رنگ آمیزی رأس گراف، نسبت دادن رنگ به رئوس گراف است، بطوریکه هیچ دو رأس مجاور همرنگ نباشند، و در این صورت حداقل تعداد رنگ‌های لازم برای رنگ آمیزی گراف را عدد رنگی گراف می‌نامند و با نماد $\chi(G)$ (مشخصه G) (کای) را نشان می‌دهند.

برای پیدا کردن مشخصه G یا به عبارتی عدد رنگی گراف G، ابتدا درجه‌های رئوس گراف را به طور نزولی مرتب می‌کنیم و عدد ۱ را به اولین رأس (رأس ماکزیمم) و رئوس غیر مجاور (آن) ربط می‌دهیم در صورتی که رئوس غیر مجاور (آن) خود با هم مجاور باشند باید یکی از آنها را انتخاب کنیم و تا زمانی که همه رئوس رنگ شده‌اند این فرآیند را با رأس ماکزیمم رنگ نشده تکرار می‌کنیم.

با این توضیح، عدد رنگی گراف زیر را تعیین کنید.

این الگوریتم را الگوریتم ولچ-پاول (welch-pavl) می‌نامیم.





$deg(a)=4$, $deg(b)=4$, $deg(c)=5$, $deg(d)=4$

$deg(e)=6$, $deg(f)=3$, $deg(g)=5$, $deg(h)=3$

پس دنباله درجه گراف به صورت

6, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3

بنابراین از راس e که بیشترین درجه را دارد آغاز می‌کنیم اگر راس e را رنگ کنیم آنگاه راس‌های e و a همرنگ می‌شوند با حذف این دو راس دنباله درجه گراف عبارت می‌شود

5, 5, 4, 4, 3, 3

c و g هر دو درجه 5 دارند پس به دلخواه c را انتخاب می‌کنیم آنگاه راس‌های c, h, d همرنگ می‌شوند و با حذف این سه راس فقط راس‌های b و f و g باقی می‌مانند که غیرمجاورند پس عدد رنگی این گراف برابر 3 می‌باشد.

a, e — رنگ 1   c, h, d — رنگ 2   f, b, g — رنگ 3

(8) ثابت کنید گراف ساده $G=(V,E)$ دوبخشی است اگر و تنها اگر عدد رنگی آن برابر 2 باشد.

حل: ابتدا فرض می‌کنیم G یک گراف دوبخشی و A و B دو بخش آن باشند در این صورت هیچ یک از دو راس در A و یا هیچکدام از دو راس در B با هم مجاور نیستند بنابراین اگر رنگ 1 به راس‌های A و رنگ 2 به راس‌های B نسبت داده شود در این صورت هیچ دو راس مجاوری هم رنگ نمی‌باشند بنابراین $\chi(G)=2$ یعنی مشخصه رنگی G، 2 است.

برعکس اگر $\chi(G)=2$، مشخصه رنگی آن مساوی 2 باشد، آنگاه قرار می‌دهیم

$V_1=\{x\in V \mid$ x عدد رنگی 1 را دارد$\}$ و $V_2=V-V_1$

در این صورت هیچکدام از 2 راس V_1 و هیچکدام از دو راس V_2 با هم مجاور

نیستند و بنابراین هر یال این گراف یک رأس در V_1 و یک رأس در V_2 دارد
یعنی V_1 و V_2 بخشهای ۲ دو بخشی بودن گراف G می‌باشند

(۹) نشان دهید در گراف ۳-منتظم رابطه زیر برقرار است.

$$|E| = \frac{3 \times |V|}{2}$$

حل: اگر مرتبه گراف یعنی $|V|$ برابر n باشد، در این صورت گراف n رأس و هر رأس از درجه ۳ می‌باشد یعنی ۳n یال منقسم است بنابراین

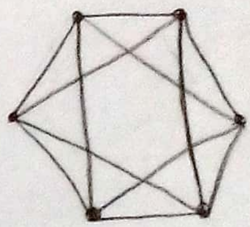
$$3|V| = 2|E|$$

$$\frac{3\times n}{2} = \text{تعداد یالها} \Rightarrow$$

(۱۰) اگر گراف G، 4-منتظم و $|E| = 3|V|-6$ باشد آنگاه مرتبه و اندازه گراف را یافته و آن را رسم کنید.

حل: بنابر قضیه ۱ داریم $|E| = \frac{4\times|V|}{2}$ پس

$$\left.\begin{array}{l}|E| = 2|V| \\ |E| = 3|V|-6\end{array}\right\} \Longrightarrow |V| = 6 ,\ |E| = 12$$



(۱۱) کلیه گرافهای دوبخشی کامل و غیر یکریخت با هم 6 رأسی را رسم کنید.

G_1 G_2 G_3

(۱۲) ماتریس مجاورت گرافهای G_1 و G_2 در زیر داده شده است آیا این دو گراف یکریخت می‌باشند.

الف)

$$A_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

حل: اگر قرار دهیم

$$A_{G_1} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} ,\quad A_{G_2} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ t \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

در این صورت هر دو گراف ۴ رأس، ۵ یال دارند و

$$\deg(a) = \deg(c) = \deg(y) = \deg(t) = 3 ,$$

$deg(b)=deg(d)=deg(x)=deg(z)=2$

یعنی دنباله درجات هر دو گراف به صورت 3,3,2,2 است پس اگر تابع
f را به صورت زیر تعریف کنیم دو گراف G_1 و G_2 یکریختند

$f: V_1 \longrightarrow V_2$ $\qquad G_1=(V_1,E_1)\ ,\ G_2=(V_2,E_2)$

$f(a)=y,\ f(b)=x,\ f(c)=t,\ f(d)=z$

ب:

$$A_{G_1}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_{G_2}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

هر دو گراف دارای ۴ رأس و ۸ یال می‌باشند، هر رأس دارای ۲ طوقه است
در هر دو گراف ولی یکریخت نمی‌باشند، دنباله درجات آنها به شرح زیر:

گراف G_1: 5,5,5,5

گراف G_2: 6,5,5,4

در صورتیکه دو گراف یکریخت باشند، رأس‌های متناظر دارای درجه یکسان
می‌باشند و در نتیجه دنباله درجات دو گراف مشابه است.

(۱۳) گراف G چهل یال و $\bar{G}$ (مکمل G) دارای هشتاد یال است. مرتبه G
(تعداد رئوس G) را تعیین کنید.

حل: اگر G دارای n رأس باشد بنابراین

مرتبه G + مرتبه $\bar{G}$ = مرتبه K_n

$$40+80=\frac{n\times(n-1)}{2} \Rightarrow n=16$$

(۱۴) ثابت کنید در گراف خودمکمل G با n رأس، $4|n-1$ یا $4|n$.

حل: اگر G یک گراف خودمکمل باشد پس G و $\bar{G}$ یکریختند و در نتیجه تعداد
یال‌های G و $\bar{G}$ برابر است. از طرفی

$\underbrace{\text{تعداد یال‌های } G}_{x} + \underbrace{\text{تعداد یال‌های } \bar{G}}_{x} = \text{تعداد یال‌های } K_n$

$$x+x=\frac{n\times(n-1)}{2} \Rightarrow 4x=n(n-1) \Rightarrow 4|n(n-1)$$

از طرفی چون n و n-1 دو عدد طبیعی متوالی‌اند پس نسبت به هم اول‌اند
بنابراین $4|n$ یا $4|n-1$.

۱۵) فرض کنید G یک دور با n رأس باشد یعنی $(G=C_n)$، نشان دهید G خودمکمل است اگر و تنها اگر $n=5$.

حل: اگر G یک دور با n رأس باشد در این صورت تعداد یال‌های G برابر n می‌باشد و چون خودمکمل است پس تعداد یال‌های $\bar{G}$ هم n است از طرفی

تعداد یال‌های K_n = تعداد یال‌های $\bar{G}$ + تعداد یال‌های G

$$\Rightarrow n+n=\frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow n=5$$

۱۶) در گراف همبند ساده G با n رأس ثابت کنید: $|E| \geq n-1$

$G=(V,E)$ 　 $|E|$: اندازه گراف

حل: برهان - روش استقرا روی n (تعداد رأس‌های گراف)

در صورتیکه $n=2$ باشد اگر G یک گراف همبند ساده باشد داریم

$n=2$

تعداد یال‌ها $=1=|E| \Rightarrow |E| \geq n-1$

$1 \geq 2-1$ ✓

حال فرض می‌کنیم برای هر گراف همبند ساده با n رأس تعداد یال‌ها حداقل $n-1$ باشد، ثابت می‌کنیم برای گراف همبند ساده $n+1$ رأسی $G=(V,E)$ نیز حکم برقرار است یعنی تعداد یال‌ها حداقل n می‌باشد.

$$|E| \geq (n+1)-1 \quad \equiv \quad |E| \geq n$$

در گراف G اگر همه رأس‌ها حداقل 2 یال متصل باشند در این صورت

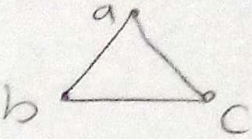
$$|E| \geq \frac{2(n+1)}{2}=n+1 \Rightarrow |E| \geq n+1 \geq n \checkmark$$

در غیر این صورت رأسی هست که یک رأس در G مثلاً رأس x_{n+1} وجود دارد که دقیقاً یک یال اتصال دارد (چون گراف همبند است پس رأسی که هر رأس آن - یک یال متصل است) واضح است که $G-x_{n+1}$ نیز یک گراف ساده و همبند با n رأس است و بنابر فرض استقرا حداقل $n-1$ یال دارد بنابراین G حداقل $n=(n-1)+1$ یال دارد.

۱۷) مثالی از یک گراف همبند ارائه دهید که:

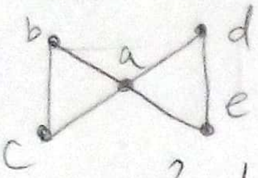
الف) دارای مدار اویلری باشد و همچنین دور همیلتون نیز داشته باشد

حل ا



دور همیلتونی abca
مدار اویلری

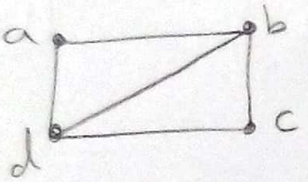
ب) فقط مدار اویلری داشته باشد و دور همیلتونی نداشته باشد.



مدار اویلری ، abcadea

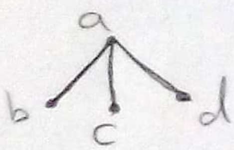
ج) فقط دارای دور همیلتونی باشد و مدار اویلری نداشته باشد.

گراف همبند مدار اویلری دارد اگر و تنها اگر درجه تمام رئوس آن زوج باشد در حالیکه b و d دارای درجه فرد هستند.

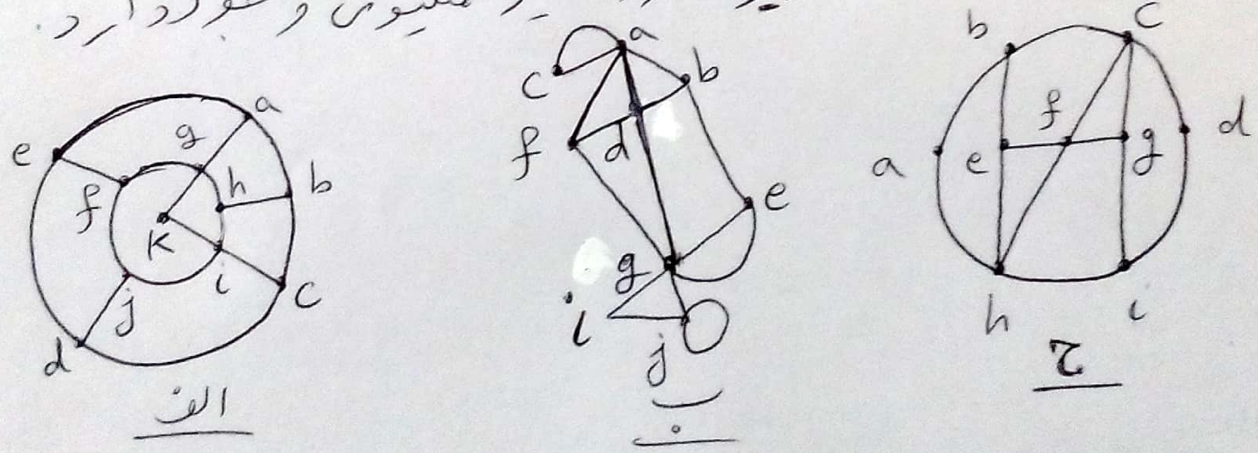


abcda دور همیلتونی

د) مدار اویلری و دور همیلتونی هیچکدام را نداشته باشد.



(۱۸) در کدام یک از گرافهای زیر دور و مسیر همیلتونی وجود دارد.



حل ا

الف) دور همیلتونی aefjdcikghba
مسیر همیلتونی abcdefjihgk یا aefjdcikghb

ب) cafdbegij مسیر همیلتونی است ولی دور همیلتونی ندارد.

ج: cbahefgidc دور همیلتونی است و یا fehabcdigf
cbahefgid مسیر همیلتونی است

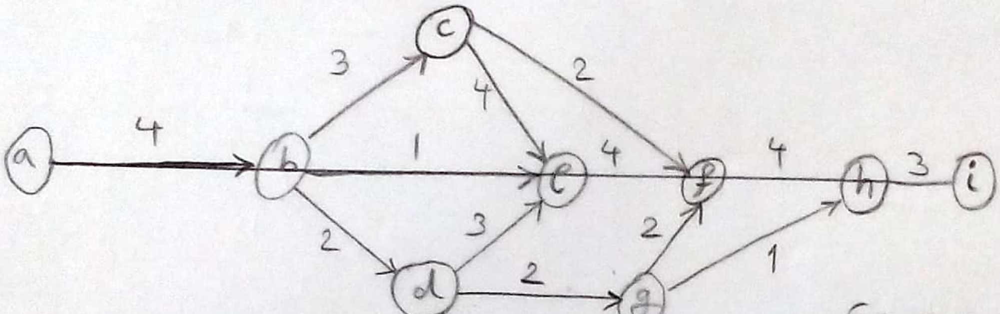
(۱۹) آیا گراف زیر اویلری است.

از طرفی E' مجموعه یالهای یک گراف $n-2$ راسی است بنابراین

$$|E'| \leq \binom{n-2}{2} \Rightarrow deg(a)+deg(b) \geq |E|-|E'|$$
$$\geq \binom{n-1}{2}+2-\binom{n-2}{2}$$
$$= n$$

$$\Rightarrow deg(a)+deg(b) \geq n$$

(۲۳) گراف زیر مراحل انجام و زمان لازم (برحسب ماه) برای اجرای یک پروژه صنعتی را نشان می‌دهد. با استفاده از الگوریتم دیکسترا، کوتاهترین زمان اتمام پروژه را بدست آورید.



حل: نتیجه هر مرحله را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

مرحله اول: $\boxed{4}$ / $a \xrightarrow{4} b$

〃 دوم: $\boxed{5}$ / $a \xrightarrow{4} b \xrightarrow{1} e$

〃 سوم: $\boxed{9}$ / $a \xrightarrow{4} b \xrightarrow{1} e \xrightarrow{4} f$ یا $a \xrightarrow{4} b \xrightarrow{3} c \xrightarrow{2} f$

〃 چهارم: $\boxed{9}$ / $a \xrightarrow{4} b \xrightarrow{2} d \xrightarrow{2} g \xrightarrow{1} h$

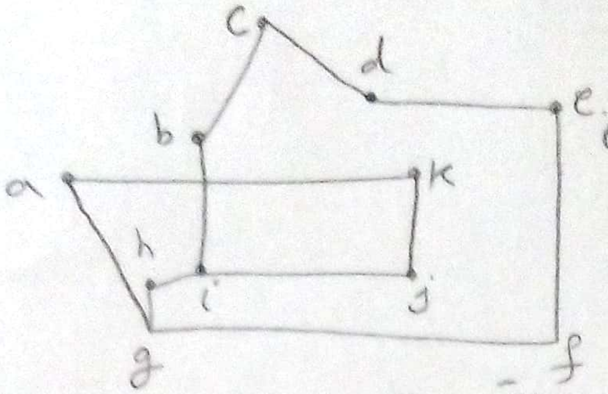
〃 پنجم: $\boxed{12}$ / $a \xrightarrow{4} b \xrightarrow{2} d \xrightarrow{2} g \xrightarrow{1} h \xrightarrow{3} i$

کوتاهترین زمان لازم <u>12</u> ماه است، از مسیر abdghi

(۲۴) گراف زیر را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید این گراف مسیر و دور همیلتونی دارد.

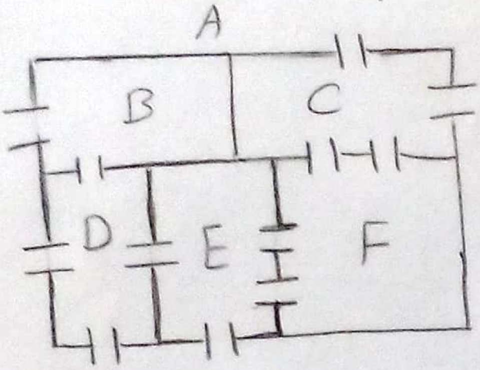
ب) به کمک قاعده نزدیکترین همسایه، دور همیلتونی بهینه را برای این گراف مشخص کنید.



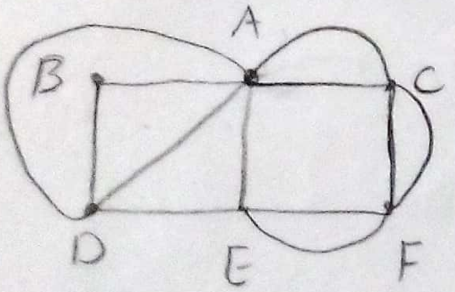
هر گراف همبند اویلری است (مدار اویلری دارد) اگر و تنها اگر درجه هر رأس آن زوج باشد که در گراف روبرو چنین نیست چون $deg(i)=3$ ، ولی گذر اویلری دارد.

ihgakjibcdefg یک گذر اویلری است

(۲۰) اگر گراف زیر، نقشه مسطح یک ساختمان اداری باشد، آیا می‌توان در این ساختمان گشتی زد، بطوریکه اگر از هر یک از اتاق‌ها یا بیرون ساختمان شروع کنیم مطمئن باشیم که دقیقاً هر راه فقط یکبار طی شده است؟



حل: اگر فضای بیرون ساختمان را رأس A و فضای داخل هر اتاق را یک رأس در نظر بگیریم و هر یک از درهای اتاق‌ها را یک یال بین دو رأس بگیریم گراف حاصل به شکل زیر است.



در این شکل اگر منظور این است که گشتی بزنیم و از همه یال‌ها عبور کنیم و دوباره به محل اولیه بازگردیم یعنی یک مدار اویلری طی کنیم که البته وجود دارد زیرا هر رأس آن از درجه زوج است، مانند ADBADEACFEFCA یک مدار اویلری است.

(۲۱) اگر $G=(V,E)$ یک گراف ساده با n رأس و $|E| \geq \binom{n-1}{2}+2$ باشد، ثابت کنید G دارای دور همیلتونی است.

حل: بنابر قضیه اگر G یک گراف بدون طوقه با حداقل ۳ رأس باشد بطوریکه مجموع درجات هر دو رأس غیر مجاور آن بزرگتر یا مساوی n باشد آنگاه دور همیلتونی دارد، فرض می‌کنیم a و b دو رأس غیر مجاور G باشند، در این صورت اگر $G'=(V',E')$ که در آن $V'=V-\{a,b\}$ و E' مجموعه یال‌های گراف G بدون رأس‌های a و b باشد

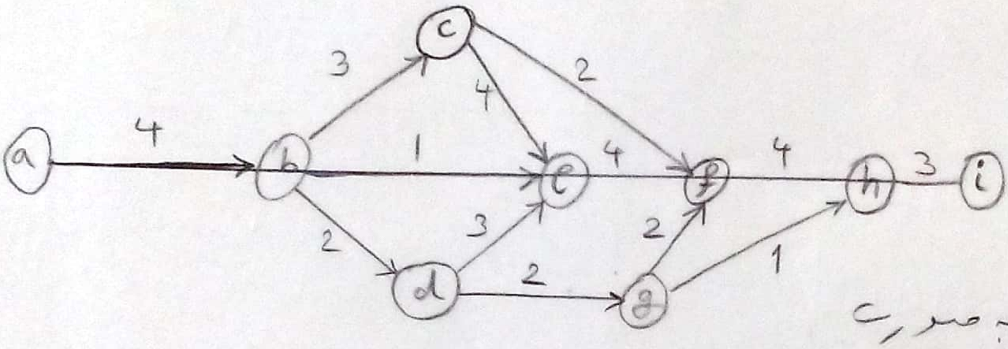
$\Longrightarrow |E|=|E'|+deg(a)+deg(b)$ (چون a و b غیر مجاورند)

از طرفی E' مجموعه یالهای یک گراف $n-2$ راسی است بنابراین

$$|E'| \leq \binom{n-2}{2} \Rightarrow deg(a)+deg(b) \geq |E|-|E'|$$
$$\geq \binom{n-1}{2}+2-\binom{n-2}{2}$$
$$= n$$

$$\Rightarrow deg(a)+deg(b) \geq n$$

۲۳) گراف زیر مراحل انجام و زمان لازم (برحسب ماه) برای اجرای یک پروژه صنعتی را نشان می‌دهد. با استفاده از الگوریتم دیکسترا، کوتاهترین زمان انجام پروژه را بدست آورید.



حل: نتیجه هر مرحله را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

مرحله اول: $\boxed{4}$ / $a \xrightarrow{4} b$

" دوم: $\boxed{5}$ / $a \xrightarrow{4} b \xrightarrow{1} e$

" سوم: $\boxed{9}$ / $a \xrightarrow{4} b \xrightarrow{1} e \xrightarrow{4} f$ یا $a \xrightarrow{4} b \xrightarrow{3} c \xrightarrow{2} f$

" چهارم: $\boxed{9}$ / $a \xrightarrow{4} b \xrightarrow{2} d \xrightarrow{2} g \xrightarrow{1} h$

" پنجم: $\boxed{12}$ / $a \xrightarrow{4} b \xrightarrow{2} d \xrightarrow{2} g \xrightarrow{1} h \xrightarrow{3} i$

12 ماه کوتاهترین زمان لازم است، از مسیر abdghi

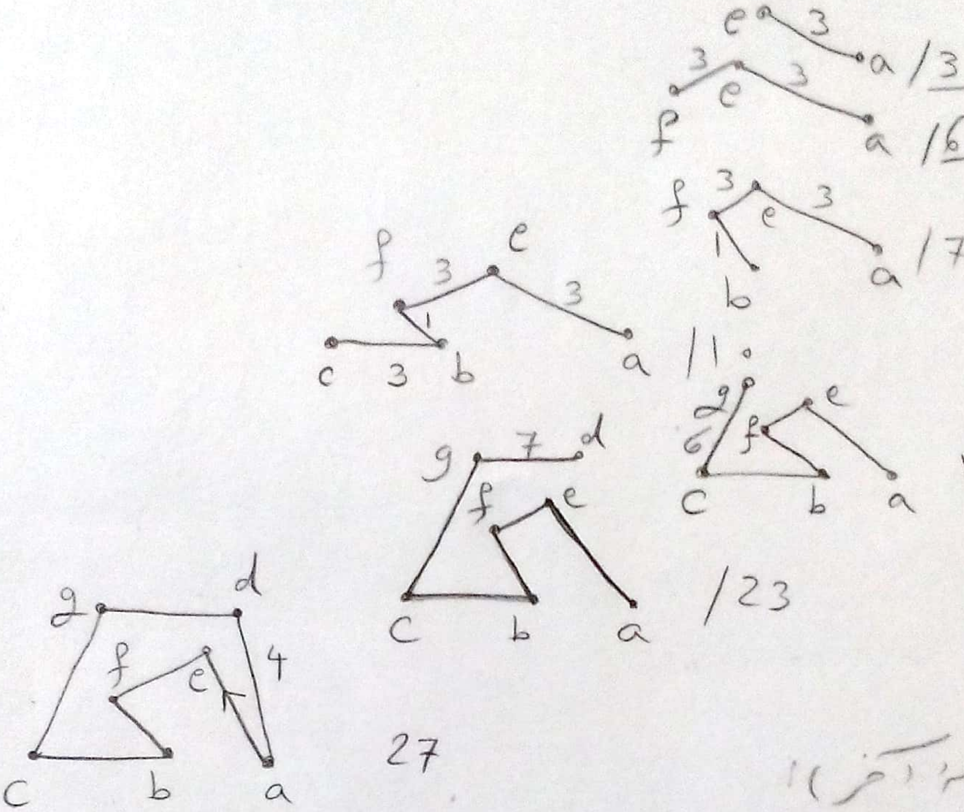
۲۴) گراف زیر را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید این گراف مسیر و دور همیلتونی دارد.

ب) به کمک قاعده نزدیکترین همسایه، دور همیلتونی بهینه را برای این گراف مشخص کنید.

الف) abcfegda دور همیلتونی است، واضح است abcfegd هم یک مسیر همیلتونی است.

ب) اگر به دلخواه از رأس a آغاز کنیم دور همیلتونی نیمه بهینه را طی مراحل زیر بدست می‌آوریم



مرحله اول: 3

〃 دوم: 6

〃 سوم: 7

〃 چهارم:

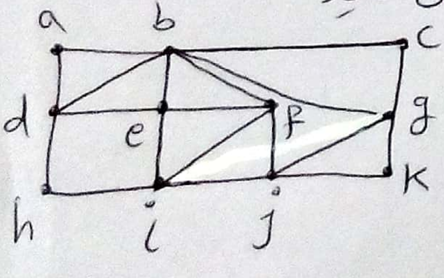
〃 پنجم: 16

〃 ششم:

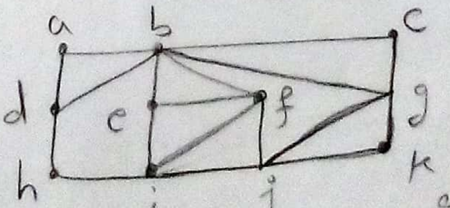
〃 هفتم (مرحله آخر):

البته مسیر aefbcgda که مسیر نیمه بهینه است و شاید مسیرهای دیگر (مثلاً از رأس‌های دیگر آغاز کنیم) کمتر از این باشد مثلاً gfbcdaeg هزینه‌ی مسیر آن 26 است.

(۲۴) برای گراف زیر اولاً یک مدار اویلری ارائه دهید و ثانیاً با حذف یال de از این گراف، گذر اویلری برای گراف باقیمانده تعیین کنید.



حل: اولاً bcgkjgbfjifedhiebadb



ثانیاً

طبق قضیه هر گراف همبند گذر اویلری دارد اگر و تنها اگر دقیقاً دو رأس از درجه فرد داشته باشد و در این صورت گذر از یک رأس فرد آغاز و به رأس فرد دیگر ختم می‌شود. در شکل فوق با حذف یال de تمام رئوس بجز d و e زوج هستند. مثلاً efbgjkgcbeifjihdab یک گذر اویلری است.

(۲۵) - به ازای چه مقادیری از n ، K_n مدار اویلری دارد؟

حل: طبق قضیه باید همه رئوس از درجه زوج باشند، در K_n همه رئوس از درجه $n-1$ باشند یعنی

$$n-1=2k \Longrightarrow n=2k+1$$

یعنی باید n فرد باشد، بنابراین گراف کامل با مرتبهٔ فرد، اویلری است.

(۲۶) تعیین کنید - به ازای چه مقادیری از n ، K_n گذر اویلری دارد ولی مدار اویلری ندارد؟

حل: با توجه به تمرین ۸ ، برای آنکه مدار اویلری نداشته باشد باید n فرد نباشد یعنی n از زوج باشد و برای گذر اویلری باید دقیقاً ۲ رأس از درجهٔ فرد داشته باشد و چون درجه هر رأس $n-1$ است یعنی درجهٔ تمام n رأس فرد است پس باید n دقیقاً ۲ باشد.

با توجه به تمرین ۲۵ و ۲۶ و ۸ ، گراف کامل اویلری است اگر n فرد باشد و اگر $n=2$ گذر اویلری دارد و اگر $n\geq 3$ گذر اویلری ندارد.

(۲۷) هر گراف ساده و همبند G با n رأس ثابت کنید حداقل $n-1$ یال موجود است.

حل: یک روش استقرا روی تعداد رأسهای گراف همبند ثابت می‌کنیم.

اگر $n=2$ باشد، واضح است که اگر گراف G ساده و همبند باشد پس G به شکل زیر است.

یعنی دقیقاً یک یال دارد و حکم برقرار است.

حال به فرض استقرا اگر هر گراف ساده همبند n رأسی دارای دست کم $n-1$ یال باشد ثابت می‌کنیم اگر G یک گراف همبند و ساده با $n+1$ رأس باشد دست کم $(n+1)-1$ یعنی n یال دارد.

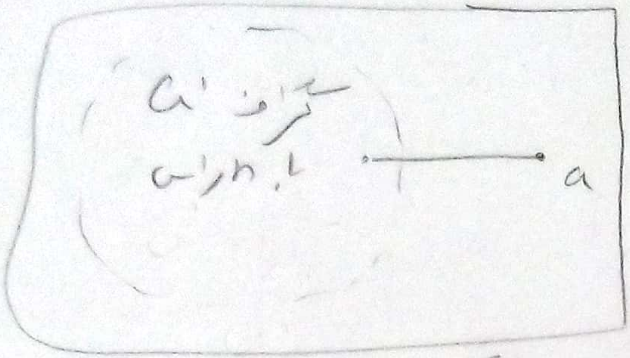
اگر تمام رئوس G دست کم به ۲ یال متصل باشند در این صورت زیرا هر رأس دست کم ۲ یال متصل است و از طرفی $n+1$ رأس وجود دارد.

$$|E| \geq \frac{2\times(n+1)}{2} = n+1$$

$$\Longrightarrow |E| \geq n$$

و اگر چنین نباشد با توجه به همبند بودن یال پس دست کم یک رأس از درجهٔ ۱ دارد یعنی رأسی از گراف مثل a وجود دارد که دقیقاً یک یال به آن متصل است حال اگر این رأس و این یال را از G حذف کنیم، و گراف را G' بنامیم چون G همبند است ، G' نیز همبند ساده است و دارای n رأس و بنابر فرض استقرا حداقل $n-1$ یال دارد پس

به افزودن این یال G دارای $(n-1)+1$ یعنی n یال است و حکم برقرار می‌شود.



گراف G با $n+1$ راس

(۲۸) فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف ساده و مسطح و همبند با حداقل ۳ راس باشد، بطوریکه حداقل گشت بسته در گراف با طول ۴ باشد، ثابت کنید
$|E| \leqslant 2|V|-4$

حل: چون هر گشت بسته دست کم طول ۴ دارد پس درجه هر ناحیه دست کم ۴ است.
از طرفی بنابر فرمول برای هر گراف مسطح داریم: $|E|+2=|V|+|R|$.

$$\forall i: \deg(R_i) \geqslant 4 \Longrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{|R|} \deg(R_i)}_{2|E|} \geqslant 4 \times |R| \Longrightarrow 2|E| \geqslant 4|R|$$

$$\Longrightarrow |R| \leqslant \frac{1}{2}|E|$$

$$|E|+2=|V|+|R| \Longrightarrow |E|=|V|+|R|-2 \leqslant |V|+\frac{1}{2}|E|-2$$

$$\Longrightarrow |E| \leqslant |V|+\frac{1}{2}|E|-2 \Longrightarrow |E| \leqslant 2|V|-4$$

چند مثال حل شده

مثال ۱) برنامه‌های کامپیوتری ۲ شرطی با سرعت ۱ و ۸ اجرا می‌شوند که ترتیب عبارتهای مرتبط با هم، رعایت شود. این عبارتها را می‌توان توسط یک گراف نمایش داد بطوریکه نظیر هر عبارت یک رأس گراف منظور شود و یالی از رأس اول به رأس دوم متصل شود هرگاه عبارت دوم قبل از عبارت اول باشد.

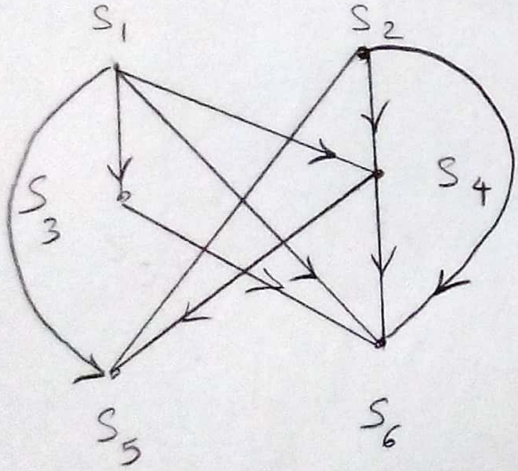
این گراف را گراف تقدم یا برتری می‌نامیم.

برنامه کامپیوتری زیر در نظر گرفته شده است، گراف تقدم آن را رسم کنید.

$S_1 : a := 0$ ، $S_2 : b := 1$ ، $S_3 : c := a + 1$ ، $S_4 : d := b + a$

$S_5 : e := d + 1$ ، $S_6 : f := c + d$

حل)



مثال) چند گراف جهت‌دار با n رأس حداکثر می‌توان رسم کرد.

حل) از آنجا که در هر گراف جهت‌دار ترتیب مهم است بین رأس شروع و رأس پایان باید معلوم باشد پس هر یال مثلاً ab که رأس a را به رأس b می‌برد می‌توان متناظر یک زوج مرتب یعنی (a, b) دانست بنابراین تعداد یالهای متمایز قابل رسم بین این n رأس متناظر تعداد زوجهای مرتب در $V \times V$ می‌باشد، یعنی $n \times n$ یال متمایز وجود دارد و هر گراف زیرمجموعه‌ای از این یالها را دارد یعنی تعداد گرافهای این n رأس متناظر تعداد زیرمجموعه‌های $V \times V$ یعنی $2^{n \times n}$ یا به عبارتی $2^{(n^2)}$ می‌باشد.

هر گراف G متناظر یک زیر مجموعه $V\times V$ است

$G \sim A \quad , A\subseteq V\times V$

و اگر گراف ساده باشد در این صورت طوقه ندارد پس تعداد یالهای متمایز
برابر $n\times(n-1)$ و تعداد زیر مجموعه های آن $2^{n\times(n-1)}$ یعنی 2^{n^2-n} است.

بنابراین 2^{n^2-n} گراف جهت‌دار ساده وجود دارد در این حالت هر یال متناظر
یک زوج مرتب (a,b) است که در آن $a\neq b$ می‌باشد.

همچنین واضح است اگر گراف چندگانه باشد (هر یال موازی مجاز باشد) در این
صورت از آنجا که بین هر دو راس می‌توان به هر تعداد یال برقرار کرد پس تعداد
یالهای چنین گرافی و در نتیجه تعداد این چنین گرافها قابل تعیین نیست.

مثال: چند گراف بدون جهت با n راس می‌توان رسم کرد.

حل: در گراف ساده بدون جهت تعداد یالهای متمایز $\frac{n\times(n-1)}{2}$ و در نتیجه تعداد
گرافهای متمایز $2^{\frac{n\times(n-1)}{2}}$ می‌باشد و در صورتی که طوقه نیز وجود داشته باشد
پس تعداد یالهای متمایز برابر $n+\frac{n\times(n-1)}{2}$ یعنی $\frac{n(n+1)}{2}$ و در نتیجه $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$
گراف متمایز وجود دارد.

مثال: اگر $V=\{v_i\}_{i=1}^{7}$ یک مجموعه 7 عضوی باشد. مقادیر زیر را تعیین کنید.

الف: با این 7 راس چند گراف ساده می‌توان رسم کرد.

حل: برای یک مجموعه 7 عضوی، $\binom{7}{2}$ یال بدون جهت وجود دارد و
هر گراف یک زیر مجموعه‌ای از این یالها را دارد. بنابراین مقدار خواسته شده،
برابر تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه $\binom{7}{2}$ عضوی (یعنی 21 عضوی)
است یعنی 2^{21} گراف وجود دارد.

ب) چند گراف ساده با ۴ یال که شامل یال $e_1 e_2$ باشد، وجود دارد؟

حل) از آنجا که یک یال (آ) مشخص است باید از بین یالهای دیگر، سه یال به دلخواه انتخاب شود، تعداد این یالها برابر $\binom{7}{2}-1$ در نتیجه تعداد گرافهای با چنین حالتی برابر $\binom{\binom{7}{2}-1}{3}$ است یعنی $\binom{20}{3}$.

ج) با این رأس ها، چند گراف ساده ۳ یالی می توان رسم کرد؟

حل) تعداد گرافها $\binom{\binom{7}{2}}{3}=\binom{21}{3}$ $\Longleftarrow$ کل تعداد یالها $\binom{7}{2}$

د) چند گراف ساده با ۴ یال موجود است که گراف $e_2 e_3$ را شامل نباشد؟

حل) تعداد گرافهای مطلوب $\binom{20}{4}$ $\Longleftarrow$ کل تعداد یالهای مطلوب $\binom{7}{2}-1=20$

هـ) چند گراف ساده با ۳ یال که یال $e_1 e_2$ را شامل باشد و یال $e_2 e_3$ را نداشته باشد.

حل) تعداد گرافهای مورد نظر $\binom{19}{3}$ $\Longleftarrow$ $\underbrace{\binom{7}{2}}_{\text{کل تعداد یالها}}-2=19$

و) چند گراف ساده با ۳ یال که شامل یال $e_1 e_2$ هست ولی شامل رأس e_3 نیست موجود است؟

حل) چون رأس e_3 را ندارد پس یالهای متقاطع به آن هم حذف می شود.

تعداد گرافها $\binom{14}{2}$ $\Longleftarrow$ $\binom{6}{2}-1=14$

مثال) اگر در یک گراف n رأس موجود باشد، چند گراف با l یال می توان رسم کرد.

حل) کل تعداد یالها برابر انتخاب 2 از n است یعنی $\binom{n}{2}$ یعنی $\frac{n(n-1)}{2}$ می باشد و تعداد چنین گرافهایی برابر انتخاب l یال از این تعداد است یعنی $\binom{\frac{n(n-1)}{2}}{l}$.

بطور مثال اگر 5 رأس داشته باشیم تعداد گرافهای 3 یالی برابر $\binom{\frac{5\times 4}{2}}{3}$ یعنی $\binom{10}{3}$ برابر 120 گراف است.

مثال ۱۵: آیا می‌شود در یک مهمانی ۷ نفره، هر نفر دقیقاً با ۳ نفر دوست باشد؟

جواب: اگر این حالت را مانند یک مجموعه‌ی ۷ راسی و رابطه‌ی دوستی را مانند وجود یک یال بین دو راس در نظر بگیریم، بنابر نکته‌ی ۱ با ۸ باید تعداد رئوس فرد، یک عدد زوج باشد در حالیکه فرض مسئله این ۷ راس فرد (درجه‌ی ۳) باید موجود باشد که تناقض است.

مثال: اگر گراف شامل یک راس درجه‌ی ۴ و ۲ راس درجه‌ی ۳ و n راس درجه‌ی ۱ باشد و $\underbrace{|V|}_{\text{تعداد رئوس}} = \underbrace{|E|}_{\text{تعداد یالها}} - 1$، مطلوب است مقدار n.

حل:

$$① \; 1\times 4 + 2\times 3 + n\times 1 = \text{دو برابر تعداد یالها} = 2|E|$$
$$② \; 1 + 2 + n = \text{تعداد راس‌ها} = |V|$$
$$③ \; |V| = |E| - 1$$

$$① \Rightarrow n = 2|E| - 11$$
$$③ \Rightarrow |E| = |V| + 1 = (n+3) + 1 = n+4$$
$$\Rightarrow n = 2(n+4) - 11 \Rightarrow n = 3$$

توضیح: دنباله $d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1$ را دنباله گرافیکی نامیده می‌شود هرگاه دنباله درجه‌های یک گراف ساده باشد.

تحت شرایطی می‌توان با داشتن دنباله گرافیکی، گراف ساده مربوط به آن دنباله را رسم کرد.

مثال: تعیین کنید کدامیک از دنباله‌های زیر، دنباله گرافیکی اند و دنباله مورد نظر آن را رسم کنید.

الف: $4,3,3,3,2,1,1,1,1,0,0$

ب: $4,3,3,3,3,2,2,2,0$

حل: دنباله اول گرافیکی نیست زیرا تعداد رئوس فرد آن فرد است که تناقض است.

ب:

$4,3,3,3,3,2,2,2,0 \quad (1) \longrightarrow \cancel{4},\overset{2}{\cancel{3}},\overset{2}{\cancel{3}},\overset{2}{\cancel{3}},\overset{2}{\cancel{3}},2,2,2,0 \longrightarrow$

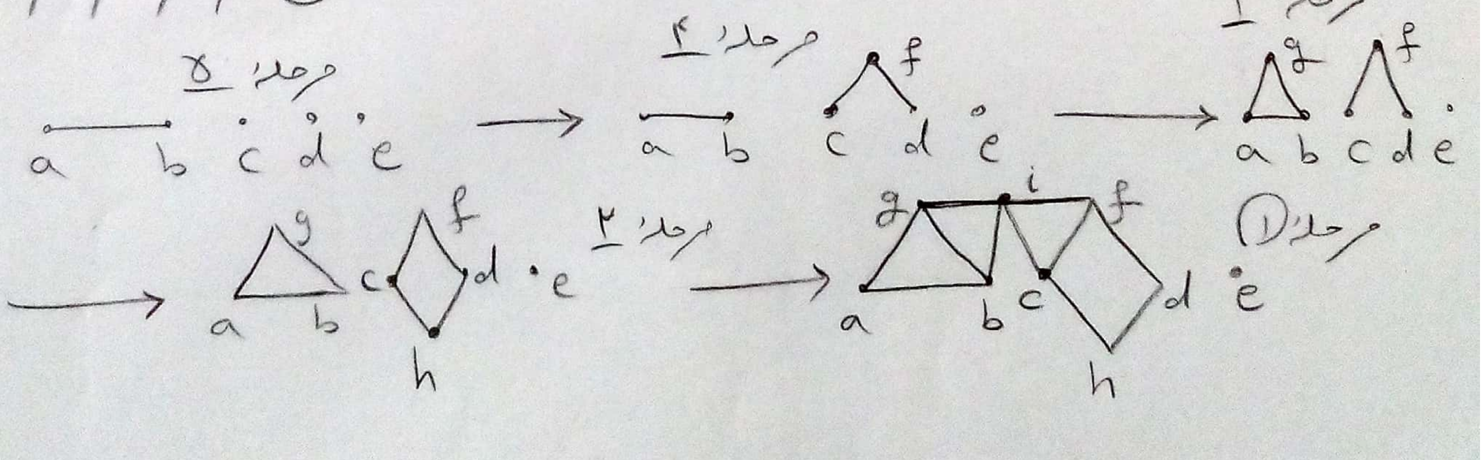
مرتب می‌کنیم

$2,2,2,2,2,2,2,0 \quad (2) \longrightarrow \cancel{2},\overset{1}{\cancel{2}},\overset{1}{\cancel{2}},2,2,2,2,0 \longrightarrow 1,1,2,2,2,2,0 \longrightarrow$

$2,2,2,2,1,1,0 \quad (3) \longrightarrow \cancel{2},\overset{1}{\cancel{2}},\overset{1}{\cancel{2}},2,1,1,0 \longrightarrow 1,1,2,1,1,0 \longrightarrow$

$2,1,1,1,1,0 \quad (4) \longrightarrow \cancel{2},\cancel{1},\cancel{1},1,1,0 \longrightarrow 0,0,1,1,0 \longrightarrow$

$1,1,0,0,0 \quad (5)$



مثال: n را چنان تعیین کنید که گراف K_n، 13 یال بیشتر از K_{n-2} داشته باشد.

حل:

تعداد یال‌های K_n = 13 + تعداد یال‌های K_{n-2}

$$\frac{n(n-1)}{2} = 13 + \frac{(n-2)(n-3)}{2} \Longrightarrow n=8$$

توضیح: عدد رنگی رأسی گراف

منظور از رنگ آمیزی رأسی گراف، نسبت دادن رنگ به رئوس گراف است بطوریکه هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند. حداقل تعداد رنگ لازم برای رنگ آمیزی گراف را عدد رنگی رأسی گراف می‌نامند و با نماد $\chi(G)$ نشان می‌دهند.

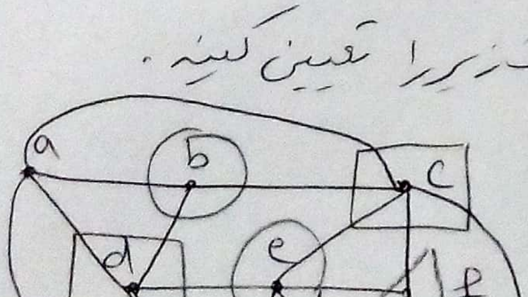
برای یافتن عدد رنگی گراف مطابق الگوریتم زیر (الگوریتم ولش-پاول) عمل می‌کنیم.

اولاً: درجه رأس‌های گراف را بطور نزولی مرتب می‌کنیم.

ثانیاً: عدد 1 را به اولین رأس (رأس با ماکزیمم) و همه رئوس غیرمجاور با آن نسبت می‌دهیم، اگر رئوس غیرمجاور با آن با هم مجاور بودند، یکی را بین آنها انتخاب کنیم.

ثالثاً: تا زمانی که همه رأس‌ها رنگ نشده‌اند قسمت «ثانیاً» را تکرار می‌کنیم.

مثال: به کمک الگوریتم فوق عدد رنگی گراف زیر را تعیین کنید.



$deg(a) = 4 = deg(d)$

$deg(b) = 3 = deg(f) = deg(h)$

$deg(c) = 5 = deg(e) = deg(g)$

$5,5,5,4,4,3,3,3$

اگر از رأس c که ماکزیمم است آغاز کنیم.

$5,5,5,4,4,3,3,3 \longrightarrow 5,5,4,3,3 \longrightarrow 5,4,3 \longrightarrow 4 \longrightarrow \chi(G)=4$

واضح است که گراف ساده $G=(V,E)$ دو بخشی است اگر و تنها اگر $\chi(G)=2$

به عبارتی اگر عدد رنگی G، 2 باشد.

زیرا اگر گراف دو بخشی با بخشهای V_1 و V_2 باشد. کافی است عدد رنگی 1 به عناصر بخش V_1، عدد رنگی 2 به بخش V_2 نسبت داده شود.

و برعکس اگر عدد رنگی یک گراف ساده 2 باشد کافی است همه عناصری که عدد رنگی آنها 1 است را در یک مجموعه و آن راسهایی که عدد رنگی آنها 2 است را در یک مجموعه دیگر قرار دهیم.

مثال: ثابت کنید در هر گراف r-منتظم داریم

$$|E| = \frac{r\,|V|}{2}$$

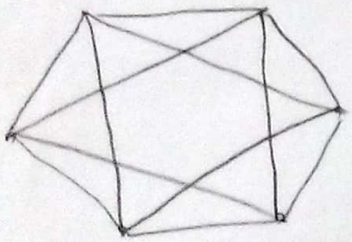
حل:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{|V|} \deg(v_i) &= r \times |V| \\ \sum_{i=1}^{|V|} \deg(v_i) &= 2|E| \end{aligned}\right\} \Longrightarrow r\times|V| = 2|E| \Longrightarrow |E| = \frac{r\times|V|}{2}$$

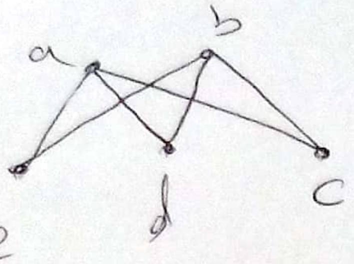
مثال: اگر گراف G 4-منتظم باشد و $|E| = 3|V| - 6$ مطلوب است $|E|$، $|V|$ و رسم گراف.

حل: بنابر مثال ۱۸ $|E| = \frac{r\times|V|}{2}$ پس

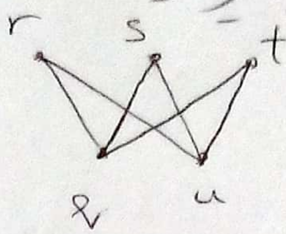
$$|E| = \frac{4\times|V|}{2} = 2|V| \xrightarrow{\text{فرض مسئله}} 2|V| = 3|V| - 6 \Longrightarrow |V| = 6$$
$$\Longrightarrow |E| = 12$$



مثال ۱: ثابت کنید دو گراف زیر یکریختند.



$K_{2,3}$



$K_{3,2}$

$$a \xrightarrow{f} v$$
$$b \longrightarrow u$$
$$c \longrightarrow r$$
$$d \longrightarrow s$$
$$e \longrightarrow t$$

f یک تناظر دوسویی و همچنین یک یکریختی بین دو گراف $K_{2,3}$ و $K_{3,2}$ می‌باشد و بطور مشابه می‌توان نشان داد برای هر m,n داریم

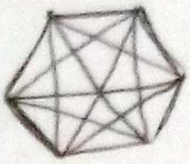
$$K_{m,n} \sim K_{n,m}$$

یکریخت است

مثال: گرافهای کامل غیر یکریخت با ۶ رأس را رسم کنید.

حل:

گراف کامل ۶ رأس $= K_6$



گرافهای کامل ۶ رأسی دو بخشی

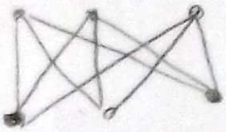
$K_{1,5}$

$K_{1,5} \sim K_{5,1}$

$K_{2,4}$

$K_{2,4} \sim K_{4,2}$ → یکریخت است.

$K_{3,3}$



مثال: ماتریس مجاورت گرافهای G_1 و G_2 در موارد زیر داده شده است. در هر مورد تعیین کنید آیا گراف G_1 و G_2 یکریختند؟

الف:

$$A_{G_1}=\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad A_{G_2}=\begin{array}{c|cccc} & e & f & g & h \\ \hline e & 0 & 1 & 0 & 1 \\ f & 1 & 0 & 1 & 1 \\ g & 0 & 1 & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$G_2: 3,3,2,2$

$G_1: 3322$

$deg(a)=3,\ deg(c)=3,\ deg(b)=2,\ deg(d)=2$

$deg(f)=3,\ deg(h)=3,\ deg(e)=2,\ deg(g)=2$

$\varphi: \{a,b,c,d\} \longrightarrow \{e,f,g,h\}$

یکریختند دو گراف G_1 و G_2 تحت یکریختی φ

$a \xrightarrow{\varphi} f$

$c \longrightarrow h$

$b \longrightarrow g$

$d \longrightarrow e$

ب:

$$A_{G_1}=\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 2 & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 2 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 2 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}, \qquad A_{G_2}=\begin{array}{c|cccc} & e & f & g & h \\ \hline e & 2 & 0 & 0 & 1 \\ f & 1 & 2 & 0 & 0 \\ g & 0 & 1 & 2 & 0 \\ h & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$G_1: 6,5,5,4$

$G_2: 5,5,5,5$

دنباله نزولی درجات دو گراف یکسان نیست پس غیر یکریختند و یا اگر ستونهای اول، دوم، سوم هر دو گراف دقیقاً یکی هستند ولی ستون سوم آنها با هم متفاوت شدند.

مثال: اگر گراف G، 40 یال و گراف $\bar{G}$، 80 یال داشته باشد، تعداد رئوس G را معین کنید.

حل:

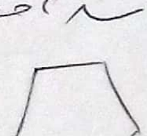
$G=(V,E)$, $\bar{G}=(V,\bar{E})$, $n=|V|$

$$|E|+|\bar{E}|=\frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 40+80=\frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow n=16$$

مثال: ثابت کنید اگر $G=(V,E)$ یک گراف خودمکمل با n رأس باشد آنگاه: $4|n-1$ یا $4|n$.

حل: در یک گراف K_n، تعداد یالها برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ می‌باشد حال اگر G یک گراف خودمکمل باشد باید این تعداد را به دو قسمت مساوی برای G و $\bar{G}$ تقسیم کرد یعنی باید $2|\frac{n(n-1)}{2}$ یا به عبارتی $4|n(n-1)$ را داریم بنابراین n یا n-1 یکی بر 4 قابل قسمت است.

مثال: اگر G یک گراف C_n (یک دور n رأسی) باشد، خودمکمل است اگر و تنها اگر $n=5$ باشد.



حل: اگر G یک دور خودمکمل باشد پس درجه هر رأس آن برابر 2 می‌باشد در نتیجه اگر خودمکمل $G\sim\bar{G}$ پس درجه هر رأس در $\bar{G}$ نیز همین است از طرفی برای هر رأس $v\in V$ داریم

$$\deg_{G}(v)+\deg_{\bar{G}}(v)=\deg_{K_n}(v) \Rightarrow 2+2=n-1 \Rightarrow n=5$$

در عکس اگر $G=C_5$ باشد مطابق شکل 32 در صفحه 129، $G\sim\bar{G}$ یعنی G خودمکمل است.

مثال: ثابت کنید در هر گراف ساده و همبند n راسی داریم: $|E| \geq n-1$.

حل ۱ - روش استقرا روی تعداد رئوس

اگر $n=1$ پس گراف ساده است و یال ندارد یعنی

$$|E| \geq n-1$$

$$0 \geq 1-1$$

و اگر $n=2$ پس چون گراف ساده است یعنی طوقه و یال موازی ندارد و ضمناً همبند است پس دقیقاً یک یال دارد یعنی

$$|E| \geq n-1$$

۲ راس
۱ یال

$$1 \geq 2-1$$

حال به فرض استقرا اگر حکم برای هر گراف n راسی برقرار باشد ثابت می کنیم اگر گراف G دارای $n+1$ راس و گراف همبند ساده باشد آنگاه دست کم n یال دارد، پس حکم استقرا $|E| \geq n$?

اگر تمام رئوس گراف حداقل درجه ۲ باشند در این صورت

$$\text{تعداد یالها} \geq \frac{\text{حداقل درجه هر راس} \times \text{تعداد راسها}}{2} \Rightarrow |E| \geq \frac{(n+1)\times 2}{2} \Rightarrow |E| \geq n+1 \Rightarrow |E| \geq n$$

یعنی حکم برقرار است.

در غیر این صورت دست کم یک راس گراف وجود دارد که درجه‌اش ۱ (کمتر از ۲) باشد چون گراف همبند است پس راسی از گراف مانند a وجود دارد که دقیقاً درجه‌اش یک است. اگر راس a را از گراف جدا کرده و تنها یال متصل به آن را حذف کنیم در این صورت گراف $G_1 = (V_1, E_1)$ حاصل می شود که با توجه به اینکه $\deg(a)=1$ پس چون G همبند بوده است پس G_1 نیز همبند است و با توجه به فرض استقرا چون $V_1 = V - \{a\}$ یعنی G_1، n راسی است پس $|E_1| \geq n-1$

$$\Rightarrow |E| = |E_1| + 1 \geq (n-1) + 1 = n \Rightarrow |E| \geq n$$

مثال ۱۷: در چه صورت K_n مدار اویلری دارد؟

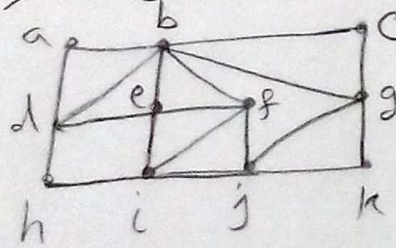
حل ۱: باید درجه همه رئوس زوج باشد، در این گراف هر رأس از درجه $n-1$ است پس باید $n-1$ زوج باشد یعنی n فرد باشد.

مثال ۱۸: به ازای چه مقادیری از n، K_n گذر اویلری دارد ولی مدار اویلری ندارد؟

حل ۱: اگر $n=2$ پس $\xrightarrow{K_2}$ گذر اویلری وجود دارد و مدار اویلری وجود ندارد.

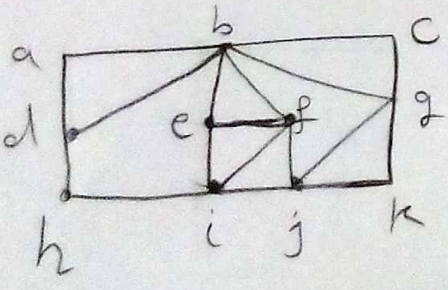
اگر $n\geq 3$ برای داشتن گذر اویلری باید دقیقاً ۲ رأس از درجه فرد موجود باشد، در حالیکه در K_n درجه تمام رئوس برابر $n-1$ است یعنی همه رئوس فرد هستند یا همگی زوجند پس به وضوح برای $n\geq 3$، گذر اویلری موجود نیست و طبق مثال ۱۷ برای $n\in N$ فرد مدار اویلری وجود دارد.

مثال ۱۹: در گراف زیر اولاً: یک مدار اویلری مشخص کنید و ثانیاً: یک گذر اویلری برای $G-de$ مشخص کنید.



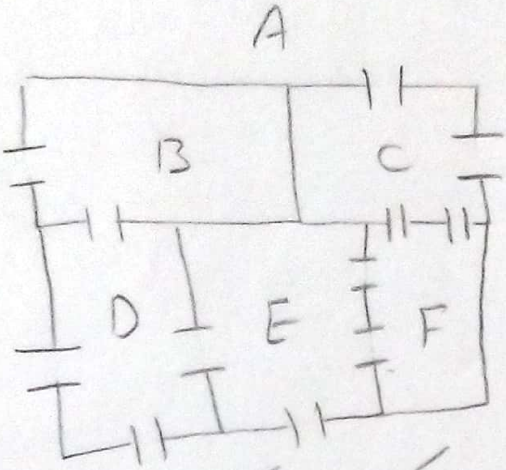
حل ۱ اولاً: bcgkjgbadhijfbdeifeb

ثانیاً: با توجه به اینکه در این حالت d و e دو رأس تنها رأس درجه فرد این گراف می‌شوند واضح است که گذر اویلری باید از رأس e یا d آغاز شود.

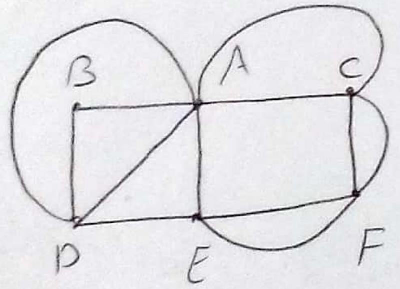


ebcgkjgbfjifbadhiebd

مثال: اگر گراف زیر نقشه سطح یک ساختمان را داشته باشد،
آیا می‌توان در این ساختمان گشتی زد بطوریکه آغاز هر یک از اتاق‌ها یا بیرون ساختمان شروع کنیم مطمئن باشیم که دقیقاً هر راه را فقط یکبار طی کرده‌ایم و دوباره به مکان اولیه خود باز گردیم؟

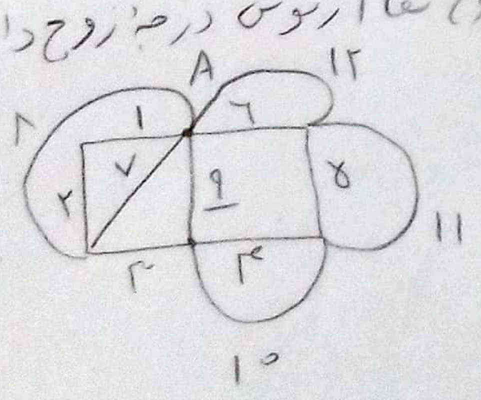


حل: اگر گراف حاصل از این نقشه را رسم کنیم بطوریکه هر اتاق یک راس باشد و همچنین یک راس هم برای فضای بیرون ساختمان و نظیر درهای بین اتاق‌ها هم یک یال در نظر بگیریم داریم



$\deg(A)=6$, $\deg(B)=2$
$\deg(C)=4$, $\deg(D)=4$
$\deg(E)=4$, $\deg(F)=4$

حال با توجه به صورت مسئله در واقع طی کردن هر راه فقط یکبار و بازگشتن به مکان اولیه همان وجود مدار اویلری است که طبق قضیه چون تمام رئوس درجه زوج دارند امکان پذیر است از جمله



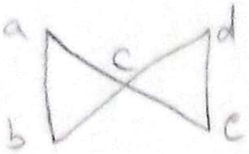
ABDEFCADAEFCA

مثال: یک گراف همبند در هر یک از شرایط زیر ارائه کنید.

الف: هم اویلری و هم همیلتونی باشد.

abca یک دور همیلتونی و هم یک مدار اویلری است.

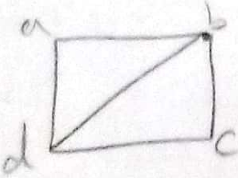
ب: مدار اویلری داشته باشد ولی همیلتونی نباشد.



acedcba یک مدار اویلری است

ولی دور همیلتونی ندارد زیرا در هر حالتی راس c تکراری می‌شود.

ج: فقط دور همیلتونی داشته باشد و مدار اویلری نداشته باشد.

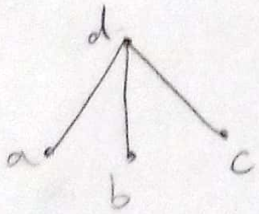


abcda یک دور همیلتونی است

مدار اویلری ندارد زیرا برای اویلری بودن باید تمام رئوس درجه زوج داشته باشند

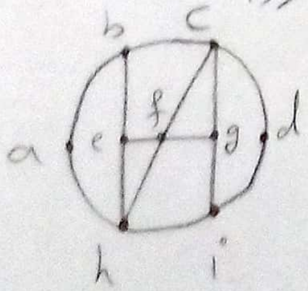
$deg(d)=deg(b)=3$

د: نه اویلری و نه همیلتونی باشد.



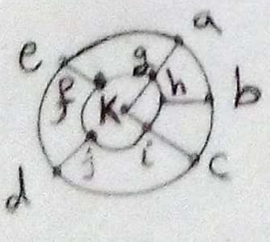
اویلری نیست زیرا باید درجه همه رئوس زوج باشد و همیلتونی نیست زیرا راس درجه یک دارد.

مثال: کدام یک از گرافهای زیر دور همیلتونی و مسیر همیلتونی دارد.



abcdigfeha : دور همیلتونی است

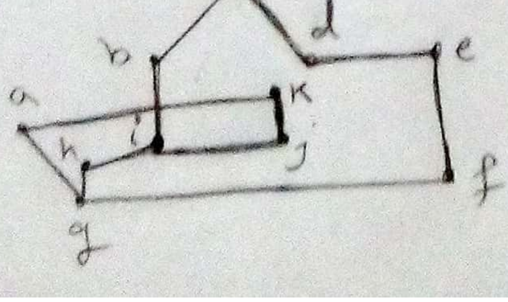
abcdigfeh : مسیر ـ



kgaefjdcbhik : دور همیلتونی است

kgaefjdcbhi : مسیر ـ

مثال: آیا گراف زیر اویلری است



حل: این گراف اویلری نیست زیرا برای داشتن مدار اویلری باید درجه تمام رئوس زوج باشد که در این گراف چنین نیست

$deg(g)=deg(i)=3$

مثال: اگر $G=(V,E)$ یک گراف با n راس باشد بطوریکه $|E| \geq \binom{n-1}{2}+2$ ،
آنگاه این گراف دور همیلتونی دارد.

حل: کافی است ثابت کنیم برای هر دو راس غیرمجاور a و b از گراف $G=(V,E)$
داریم: $deg(a)+deg(b) \geq n$.

اگر a و b دو راس دلخواه غیرمجاور از G باشند در این صورت در گراف
$G_1=(V_1,E_1)$ که در آن $V_1=V-\{a,b\}$ و E_1 مجموعه یالهای این گراف است
داریم:

$$|E|=|E_1|+deg(a)+deg(b)$$

از طرفی با توجه به اینکه V، n راس است پس V_1، $n-2$ راس دارد و داریم

$$|E_1| \leq \binom{n-2}{2}=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

$$\Longrightarrow |E| \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2}+deg(a)+deg(b) \quad ①$$

وفق صورت مسئله $|E| \geq \binom{n-1}{2}+2 \Longrightarrow |E| \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2}+2 \quad ②$

$$①, ② \Longrightarrow deg(a)+deg(b)+\frac{(n-2)(n-3)}{2} \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$$

$$\Longrightarrow deg(a)+deg(b) \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2}+2-\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

$$\Longrightarrow deg(a)+deg(b) \geq n \checkmark$$

مثال:

دنباله $d_1, d_2 \ldots d_n$ را یک دنباله گرافیکی می‌نامیم هرگاه دنباله نزولی یک گراف ساده باشد. با داشتن دنباله نزولی $d_1, d_2 \ldots d_n$ می‌توان گراف ساده‌ای رسم کرد که دنباله گرافیکی (مربوط به آن) باشد.

منظور مثال: گرافهایی رسم کنید که دنباله‌های زیر، نمایانگر دنباله (آن) باشد.

الف) $4,3,3,3,2,1,1,1,1,0,0$

ب) $4,3,3,3,3,2,2,2,0$

حل: الف) چنین گرافی وجود ندارد زیرا تعداد راس‌های (فرد) آن زوج نیست.

ب)

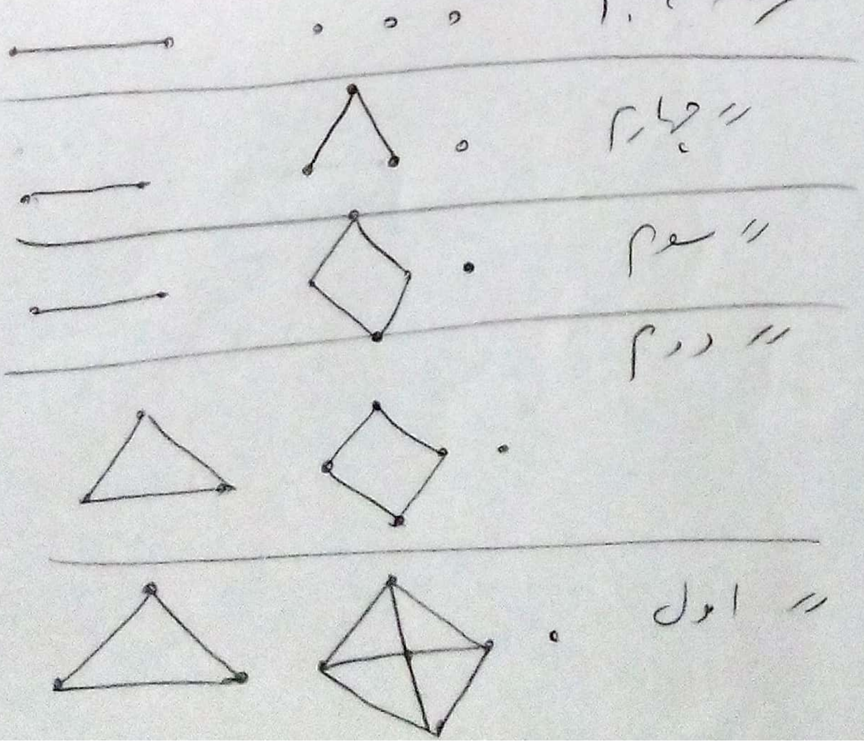
مرحله اول: $\cancel{4},3,3,3,3,2,2,2,0$

مرحله دوم: $\cancel{2},2,2,2,2,2,2,0$

مرحله سوم: $1,1,2,2,2,2,0 \Longrightarrow \cancel{2},2,2,2,1,1,0$

مرحله چهارم: $1,1,2,1,1,0 \Longrightarrow \cancel{2},1,1,1,1,0$

مرحله پنجم: $0,0,1,1,0 \Longrightarrow 1,1,0,0,0$



مرحله پنجم $1,1,0,0,0$

مرحله چهارم $2,1,1,1,1,0$

مرحله سوم $2,2,2,2,1,1,0$

مرحله دوم $2,2,2,2,2,2,2,0$

مرحله اول $4,3,3,3,3,2,2,2,0$

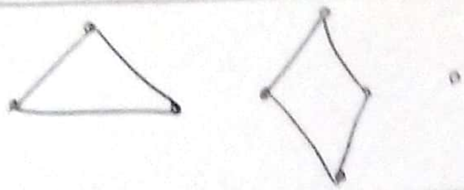
و یا

2,2,0,0,0 مرحله پنجم

2,1,1,1,1,0 " چهارم

2,2,2,2,1,1,0 " سوم

2,2,2,2,2,2,2,0 " دوم



4,3,3,3,3,2,2,2,0 " اول